**PLAN DE MEJORAMIENTO GRADO ONCE**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOMA HERMOSA**
**DOCENTE: WÍLMAR ALONSO RAMÍREZ G.**
**Refuerzo matemáticas 2011, grado 11º**
**Fecha: 26/07/2011**

**PRIMER PERÍODO**
**Competencias:**

Interpretación y manipulación de la lógica proposicional y de conjuntos como una disciplina matemática aplicada a fenómenos de la vida real.

Utilización de las desigualdades matemáticas, como elementos de comparación de diversa naturaleza.

**Contenidos:**
Lógica proposicional convencional.

Determinación de un conjunto.

Operaciones entre conjuntos.

Desigualdades matemáticas.

**Actividades:**

1**.** Se tienen las proposiciones, P: Los números 1, 2, 4 son divisores de 8, Q: La raíz cuadrada de 144 es 11, R: 2 no es número primo, T: 3 es número primo. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es una conjunción verdadera? Explicar por qué

**a.** $P \wedge Q$ **b.** $R \wedge T$ **c.** $Q \wedge T$ **d.** $P \wedge T$

2. Se tienen las proposiciones, S: El valor de X, en $X - 6 = 3$ es 10, Y: 30 es múltiplo de 15, M: ($\sqrt{2}$) pertenece al conjunto de los números racionales, N: Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º, ¿cuál de las siguientes proposiciones es una disyunción falsa? Explicar por qué

**a.** S v M **b.** S v N **c.** Y v M **d.** N v S

3. Mario vende 1/3 de su finca, arrienda 1/8 del resto, y lo que le queda lo cultiva. ¿Qué porción de la finca cultiva?

4. Resolver la siguiente desigualdad y explicar cuál es la solución: ($X^2 - X - 6 \leq 0$)

| Intervalo / Factor | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $(X + 2)$ | - | - | + |
| $(X - 3)$ | - | + | + |
| $(X + 2).(X - 3)$ | + | - | + |

**PLAN DE MEJORAMIENTO GRADO ONCE**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOMA HERMOSA**
**DOCENTE: WÍLMAR ALONSO RAMÍREZ G.**
**Refuerzo matemáticas 2011, grado 11º**
**Fecha: 26/07/2011**

**SEGUNDO PERÍODO**
**Competencias:**

Interpretación e identificación de los conceptos de variación media e instantánea de una función, a partir de un contexto cotidiano o matemático.

Asociación de los conceptos de recta secante y recta tangente, con los de variación y derivada de una función.

**CONTENIDOS**
Cálculo de límites aplicando propiedades.

Límites de funciones racionales.

ACTIVIDADES

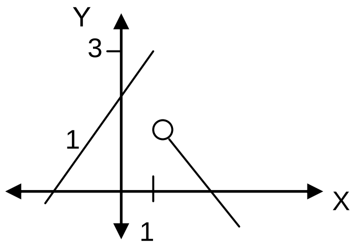
5. El siguiente límite se debe factorizar para hallar su respuesta: $\lim_{x\to 3} \frac{(X^2 - 9)}{(X - 3)}$, cuál es el valor de éste límite?

Las preguntas 6, y 7 responderlas con base en la siguiente información: Se tiene la siguiente función y su respectiva tabla de valores $Y = [\sqrt{(x + 3)} - \sqrt{3}] / x$

| X | -0,1 | -0,01 | -0,001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F(X) | 0,2911 | 0,2889 | 0,2887 | 0,2887 | 0,2884 | 0,2863 |

6. Según la tabla ¿cuál es el límite cuando x tiende a cero?
Sin tener en cuenta la tabla, si no la función ¿Cuál es el valor del límite cuando, x, tiende a 1?
7. ¿Qué valor toma, Y, cuando la X= -3?

Las preguntas 9 y 10 se refieren a la continuidad o discontinuidad de una función y a las características de las líneas rectas representadas, responderlas teniendo en cuenta la gráfica y la información:  La función f(X), está graficada en la figura, y se define de la siguiente forma:




y= f(X) = 2X + 1 si $X \leq 1$ ó

y= f(X) = -X + 2 si $X > 1$

El hueco en la gráfica significa que la función no está definida en Ese punto

9. ¿Cuáles son las pendientes de las líneas rectas representadas?
10. Explicar si la función es continua o discontinua en el punto x = 1

**OBSERVACIONES:**

El taller se entregó con un mes de anticipación.

En primera instancia se realizó un primer refuerzo y al final del mes de noviembre se hizo otro refuerzo.

El profesor atendió las dudas de los

**PLAN DE MEJORAMIENTO GRADO ONCE**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOMA HERMOSA**
**DOCENTE: WÍLMAR ALONSO RAMÍREZ G.**
**Refuerzo matemáticas 2011, grado 11$^{o}$**
**Fecha: 26/07/2011**

**TERCER PERÍODO:**
**Competencias:**
Reflexión individual, asociada al concepto de límite, y determinada en algún aspecto de la naturaleza.

Realización de cálculos de límites con calculadora, almacenando los datos en una tabla de valores, y concluyendo respecto al valor del límite pedido.

**Contenidos:**
Introducción al concepto de límite.

Idea intuitiva de límite, y forma de definirlo.

Concepto de límites laterales.

Cálculo de límites aplicando propiedades.

Límites de funciones racionales.

Variación de una función en un intervalo.

Variación media de una función.

Variación instantánea de una función.

Actividades:
1. ¿Dónde tiene asíntotas la siguiente gráfica y su respectiva función?

2. Para la gráfica anterior y su función, si X= -2, ¿cuál es el valor de Y?

3. La siguiente tabla muestra los valores de $f(x) = [Sen(x)]/x$ cuando x tiende a cero:

| X | -1 | -0.1 | -0.01 | 0 | 0.01 | 0.1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(X) | 0,84147 | 0,99833 | 0,99998 | ¿ | 0,99998 | 0,99833 | 0,84147 |

¿Cuál es el valor de éste límite, según los valores dados en la tabla:

4. El valor del límite: $\lim_{x \to 1} \frac{(X+1)^2}{2X} =$

**RESPONDA LAS PREGUNTAS 1 A 3 SEGÚN LA SIGUIENTE INFORMACIÓN:**

Una moneda se deja caer desde un edificio, la altura, Y, en el instante, t, de esa moneda se determina mediante la siguiente función

$Y(t) = -20t^2 + 90t + 6$, donde Y se mide en metros y t en segundos.

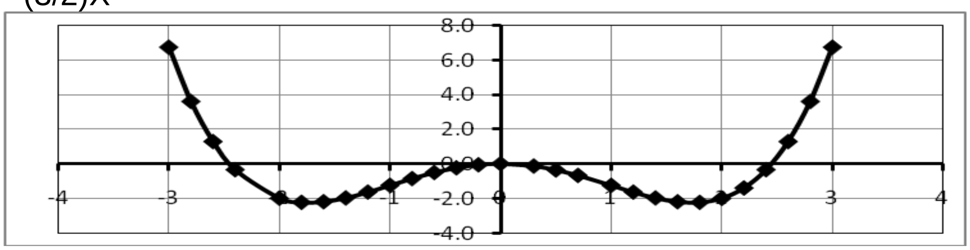
1. Hacer una tabla de valores para esta función.

2.Si la variación media de esta función se mide mediante la expresión: $[Y(b) - Y(a)]/(b - a)$, entonces, ¿cuál será la variación media en el intervalo [2, 3], donde 2 y 3 son los respectivos a y b?

3. ¿Cuál es la derivada de la función con respecto al tiempo?

Las preguntas 4, 5, y 6 responderlas, con base en la siguiente función y su gráfica:

$Y = (1/4)X^4 - (3/2)X^2$




4. ¿En qué punto se encuentra el máximo relativo de la función?
5. Un mínimo relativo de la función se encuentra aproximadamente en qué punto?
6. Calcular la derivada de la función dada.

7. La derivada de $f(X)= [4X^2 + 2X] / [2X^3 - 30X^2]$ es:

8. invente una función que tenga como derivada $y' = 4x^2$.

**OBSERVACIONES:**

El taller se entregó con un mes de anticipación.

En primera instancia se realizó un primer refuerzo y al final del mes de noviembre se hizo otro refuerzo.

El profesor atendió las dudas de los estudiantes desde el momento que se entregó el taller.

## PLAN DE MEJORAMIENTO GRADO ONCE

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LOMA HERMOSA**
**DOCENTE: WÍLMAR ALONSO RAMÍREZ G.**
**Refuerzo matemáticas 2011, grado 11º**
**Fecha: 26/07/2011**

**CUARTO PERIODO:**
**Competencias:**

Reconocimiento de la matemática como una disciplina capaz de orientar la toma de decisiones para el progreso personal.

Identificación de los valores máximos y mínimos relativos de la gráfica de una función.

Comprensión del concepto de crecimiento y decrecimiento desde una gráfica y desde el criterio de la derivada.

Interpretación de la concavidad de una función aplicando la segunda derivada de la misma.

Creación de problemas de optimización en contextos cotidianos o matemáticos.

**CONTENIDOS:**

Valores máximos y mínimos de una función.

Crecimiento y decrecimiento.

Criterio de la primera derivada.

Concavidad.

Aceptación de las normas de convivencia, en el desarrollo de trabajos de grupo.

**1** Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

1. $f(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3$

2. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 2}$

**2** Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11$

2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

3. $f(x) = e^{-x^2}$

**4** La cotización de las sesiones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$C = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$

**1.** Determinar las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.

**2.** Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

**5** Supongamos que el rendimiento r en % de un alumno en un examen de una hora viene dado por:

$r = 300t\,(1-t)$.

Donde $0 < t < 1$ es el tiempo en horas. Se pide:

**1.** ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

**2.** ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

**3.** ¿Cuando se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

**1** Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

**2** Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9}$$

**3** Determina las ecuaciones de la tangente y normal en su punto de inflexión a la curva: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$.

**4** La cantidad (y) expresa el dinero acumulado en una máquina tragaperras durante un día y sigue una ley del tipo:

$y = 1/3x^3 - 19x^2 + 352x + 100$

donde la variable x representa el tiempo en horas (de 0 a 24). Responde a las siguientes preguntas:

**1.** ¿Se queda alguna vez vacía de dinero la máquina?

**2.** Si se realiza la "caja" a las 24 horas. ¿Arroja ganancias para los dueños de la máquina?

**3.** ¿A qué hora la recaudación es máxima y a qué hora es mínima?

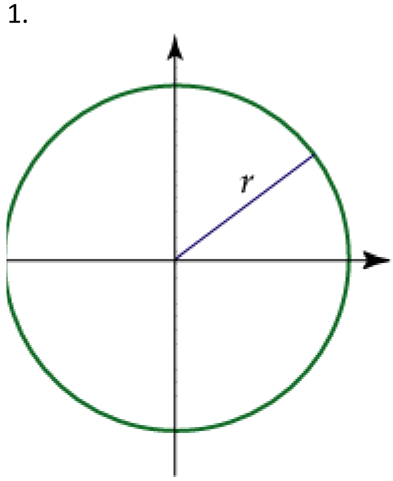
**4.** ¿Cuándo entrega el mayor premio?

## Resolución de problemas de máximos y mínimos:

En la resolución de problemas en que se debe determinar el máximo o el mínimo de una cierta expresión, deben seguirse los siguientes pasos:

- Determinar la magnitud que debe hacerse máxima o mínima, y asignarle una letra.
- Hacer un dibujo cuando sea necesario.
- Asignar una letra a las cantidades mencionadas en el problema y escribir una ecuación en la que se establezca lo que se debe hacer máximo o mínimo.
- Establecer las condiciones auxiliares del problema y formar una ecuación (ecuación auxiliar)
- Expresar la cantidad que debe maximizarse o minimizarse en términos de una sola variable utilizando para ello la ecuación auxiliar. Determinar el dominio de esta función.
- Obtener la primera derivada de esta función para determinar los valores críticos.
- Comprobar, utilizando el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada, si los valores críticos son máximos o mínimos.
- Verificar que el valor obtenido cumple las condiciones dadas en el problema
- Responder a la pregunta establecida en el enunciado del problema.
- En algunos problemas hay que utilizar diversas figuras geométricas por lo que a continuación se especifican algunas de ellas junto con las respectivas fórmulas sobre áreas y volúmenes:

1.



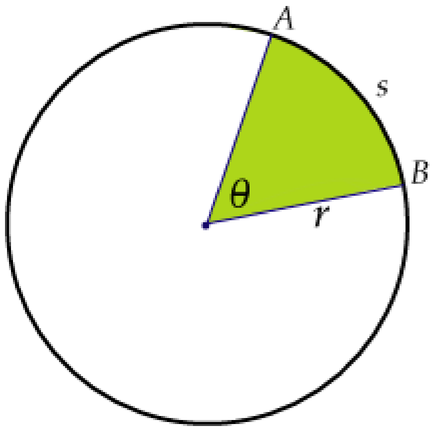

Círculo de radio r con centro en $(0,$

Ecuación: $x^2+y^2=$

Circunferencia: $2\pi$

Área: $\pi r^2$

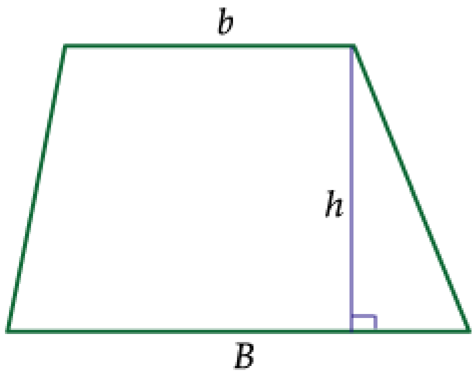
2.




Sector circular; Área: $\frac{1}{2}r^2\theta$ donde $\theta$ es el ángulo central medio en radianes.

Área: $\frac{rs}{2}$ donde *s* es la longitud del arco AB

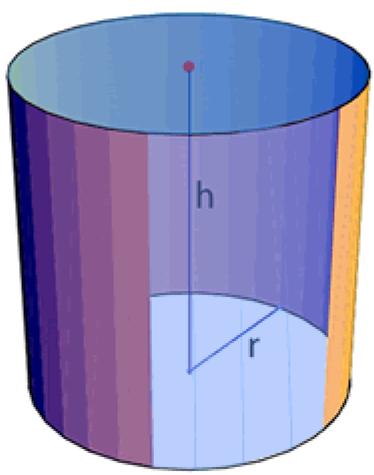
3.




Trapecio

Área: $\frac{(B+b)}{2}\cdot h$, donde B es l longitud de la base mayor, b es la d la base menor y h es la altura d trapecio.

4.




Ver en ambiente 3D

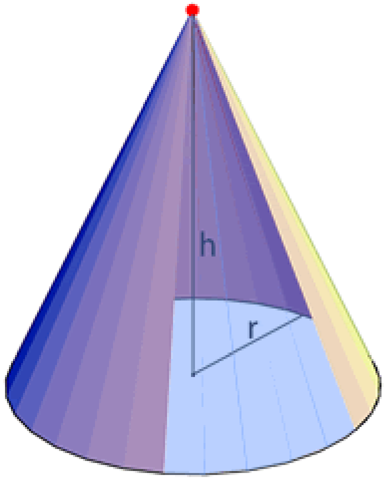
Cilindro circular recto de altura *h* radio de la base

Volumen: $\pi r^2$

Área lateral: $2\pi r$

Área total: $2\pi rh + 2\pi r^2$

5.




Ver en ambiente 3D

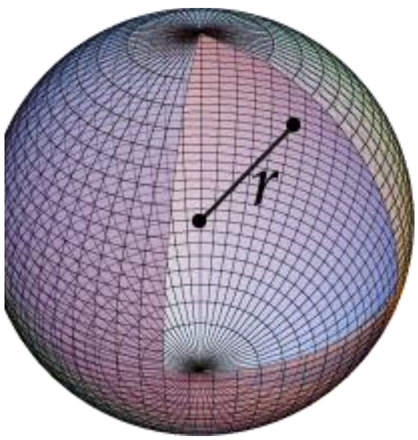
Cono circular recto de altura *h* y radio de la base *r*.

Volumen: $\frac{\pi r^2 h}{3}$

Superficie lateral: $\pi r$. $L$ donde $L$ es la generatriz está dada por:

$L = \sqrt{r^2 + h^2}$

6.




Ver en ambiente 3D

Esfera de radio

Volumen: $\frac{4}{3}r^3$.

Superficie: $4\pi r^2$

c.

Ejemplos:

1.

Determinar dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto tenga el mayor valor posible.

Solución:

Se debe de maximizar el producto P de dos números positivos.

Sean estos números: x, y

Luego $P = xy$

Como la suma de esos números es 10, entonces $x + y = 10$ es la **ecuación auxiliar**, de donde $y = 10 - x$.

Entonces: $P(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

Se debe de determinar el valor de x que hace máxima la función $P(x)$

Derivando: $P'(x) = 10 - 2x$

Valores críticos: $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x - 5$

En $x = 5$ se tiene un valor crítico, y se debe estudiar si es un valor mínimo o un valor máximo.

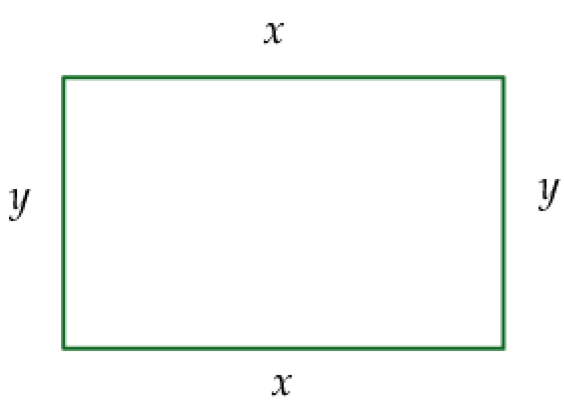
Como $P''(x) = -2$ entonces $P''(x) = -2 < 0$ por lo que en $x = 5$ se tiene un valor máximo.

Si $x = 5$ entonces $y = 10 - 5 = 5$. Luego, los números positivos cuyo producto es máximo y cuya suma es 10 son ambos iguales a 5.

2.
Un rectángulo tiene 120 m. de perímetro. Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo que dan el área máxima?

Solución:

Se debe maximizar el área A de un rectángulo:




Designemos con "*x*", "*y*" las longitudes de los lados del rectángulo.
Luego $A = xy$

Como el perímetro del rectángulo es 120 m. entonces <u>la ecuación auxiliar es:</u>
$2x + 2y = 120$ de donde $y = 60 - x$.

Luego $A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$

Como $A'(x) = 60 - 2x$ y $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$ entonces $x = 30$ es un valor crítico.

Analicemos si este valor es máximo o mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada.

Como $A''(x) = -2x$ y $A''(30) = -2(30) = -60 < 0$, entonces $x = 30$ es un valor máximo.

Si $x = 30$ entonces $y = 30$ por lo que un cuadrado de lado 30 es el rectángulo de mayor área y perímetro 120m.

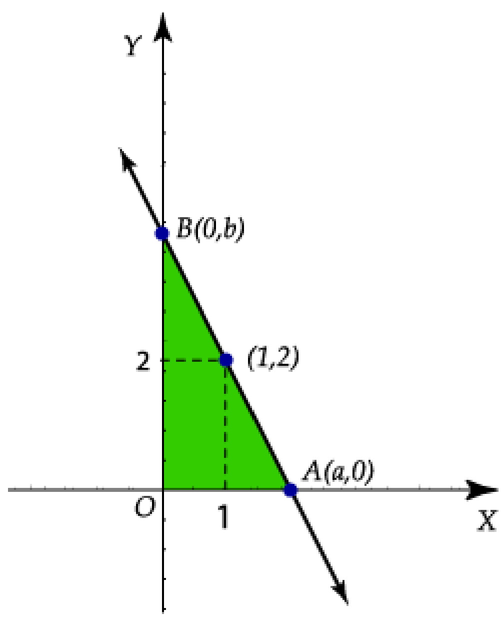
3.

Una recta variable que pasa por el punto $(1,2)$ corta al eje X en $A(a,0)$ y al eje Y en $B(0,b)$. Hallar el área del triángulo $AOB$ de superficie mínima, suponiendo A y B positivos.

Solución:

Se debe minimizar el área T de un triángulo.

Gráficamente se tiene:




El triángulo es rectángulo y su área está dada por $T = \frac{ab}{2}$

La recta pasa por los puntos $(0,b)$, $(1,2)$ y $(a,0)$, por lo que la pendiente está dada como sigue:

i.

Tomando $(0,b)$ y $(1,2)$ : $m = \frac{2-b}{1-0} = 2-b$

ii.

Tomando $(1,2)$ y $(a,0)$ : $m = \frac{2-0}{1-a} = \frac{2}{1-a}$

Luego: $2-b = \frac{2}{1-a}$ es la ecuación auxiliar, de donde $b = 2 - \frac{2}{1-a}$ (*)

Entonces $T(a) = \frac{a}{2}(2 - \frac{2}{1-a}) = a - \frac{a}{1-a} = \frac{a-a^2-a}{1-a} = \frac{-a^2}{1-a} = \frac{-a^2}{-(a-1)}$

$T(a) = \frac{a^2}{a-1}$ , $a \neq 1$

Como $T'(a) = \frac{a^2-2a}{(a-1)^2} = \frac{a(a-2)}{(a-1)^2}$ entonces

$T'(a) = 0 \Leftrightarrow a(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $a = 2$

Determinemos, utilizando el criterio de la primera derivada si los valores críticos son máximos o mínimos:

| | $0$ — $2$ | $2$ — $+\infty$ |
|---|---|---|
| $a$ | $+$ | $+$ |
| $a-2$ | $-$ | $+$ |
| $T'(a)$ | $-$ | $+$ |
| $T(a)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Del cuadro anterior, como T decrece para $a \in ]0,2[$ y crece para $a \in ]2,+\infty[$ entonces en $a = 2$ se tiene un valor mínimo.

Si $a = 2$ entonces $b = 4$ (al sustituir en (*))

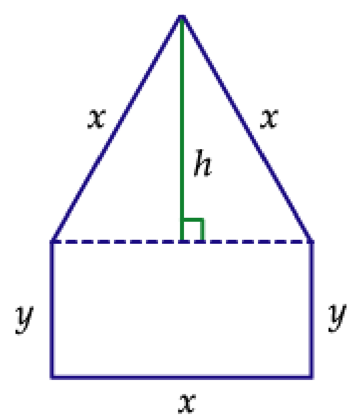
Luego el área del triángulo es $T = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$

Además, la ecuación de la recta es $y = -2x + 4$

4.
Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 3 metros. Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?

Solución:

En este caso se debe maximizar el área de la siguiente figura geométrica:




Se han señalado con las letras "*x*","*y*" las longitudes de los lados de la ventana.

El área de la ventana está dada por la suma de las áreas del triángulo y del rectángulo.

Área del triángulo: $\frac{x \cdot h}{2}$

Área del rectángulo: $xy$

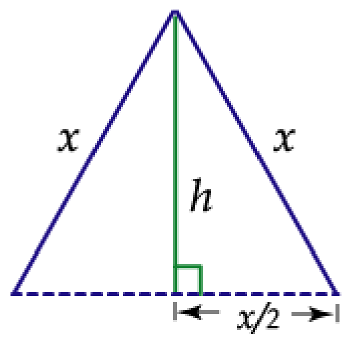
Área total: $A = xy + \frac{xh}{2}$

Como el perímetro de la ventana es 3 metros entonces: $2y + 3x = 3$ de donde

$y = \frac{3 - 3x}{2}$ es una ecuación auxiliar.

Luego: $A = x(\frac{3-3x}{2}) + \frac{xh}{2}$. Debemos escribir h también en términos de x.

Se tiene en el triángulo:




$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$$

$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2$$

$h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$, $h > 0$

Luego: $A(x) = \frac{1}{2}(3x - 3x^2) + \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$$A(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$A'(x) = \frac{3}{2} - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Determinamos los valores críticos

Luego: $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + x\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{6 - \sqrt{3}}$$

El valor crítico es $x = \dfrac{3}{6 - \sqrt{3}}$

Utilizando el criterio de la segunda derivada se tiene que

$A''(x) = -3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ , y , $A''\left(\dfrac{3}{6 - \sqrt{3}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 3 < 0$

de donde $x = \dfrac{3}{6 - \sqrt{3}}$ es un valor máximo.

Luego, la longitud de la base del rectángulo debe ser $\dfrac{3}{6 - \sqrt{3}}$ para que la ventana tenga el área máxima.

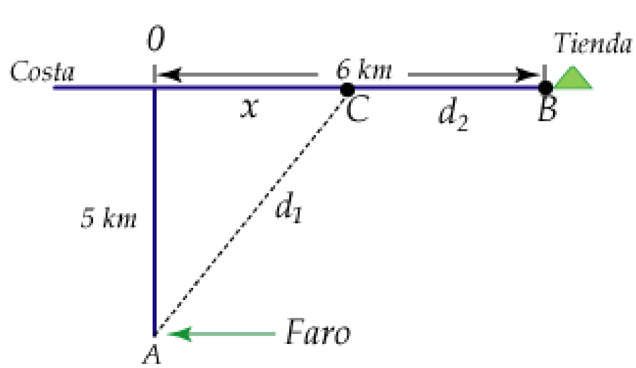
La altura del rectángulo debe ser: $\dfrac{9 - \sqrt{3}}{12 - 2\sqrt{3}}$ y el lado del triángulo es $\dfrac{3}{6 - \sqrt{3}}$ .

5.
Un faro se encuentra ubicado en un punto A, situado a 5 Km. del punto más cercano O de una costa recta. En un punto B, también en la costa y a 6 Km. de O, hay una tienda. Si el guardafaros puede remar a $2km/h$ , y puede cambiar a $4km/h$ , dónde debe desembarcar en la costa, para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?

Solución:

Se debe minimizar el tiempo de recorrido

Gráficamente la situación es la siguiente:



Sea *C* el punto de la playa en el que desemboca el guarda faros, designemos con x la distancia $OC$.

$d_1$ es la distancia en que debe remar desde *A* hasta *C*

$d_2$ es la distancia en que debe caminar desde *C* hasta *B*

Note que $d_1 = \sqrt{25+x^2}$ y $d_2 = 6 - x$

Además se tiene que la distancia *S* recorrida en un tiempo t es igual a la velocidad por el tiempo: o sea;

$S = v \cdot t$ de donde $t = \frac{s}{v}$.

La distancia $d_1$ es recorrida con una velocidad de $2km/h$, y la distancia $d_2$ con una velocidad de $4km/h$, por lo que el tiempo total de recorrido será:

$t = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2} + \frac{6-x}{4}$ siendo esta la función a minimizar.

Luego: $t'(x) = \frac{x}{\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{4} = \frac{4x - \sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$

Para determinar los valores críticos hacemos $t'(x) = 0$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \sqrt{25+x^2} = 0 \Leftrightarrow 16x^2 = 25 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Utilicemos el criterio de la segunda derivada para determinar si el valor crítico es un mínimo.

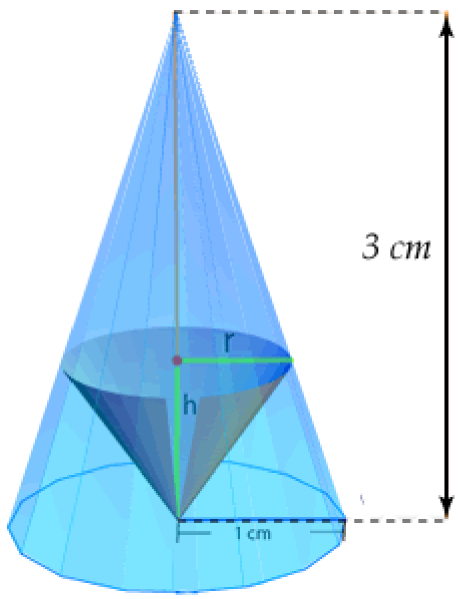
$t''(x) = \frac{25}{(25+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, evaluando en $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ se obtiene

$t''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{25}{\left(\frac{80}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$ por lo que $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ es un valor mínimo.

Luego, el guarda faros debe desembarcar en un punto C que está a $\sqrt{\frac{5}{3}}$ Km. de punto C, para llegar a la tienda en el menor tiempo posible.

6.

Determinar las dimensiones del cono de mayor área lateral que puede inscribirse en un cono circular recto de radio 1cm y altura 3cm, como se muestra en la figura siguiente:

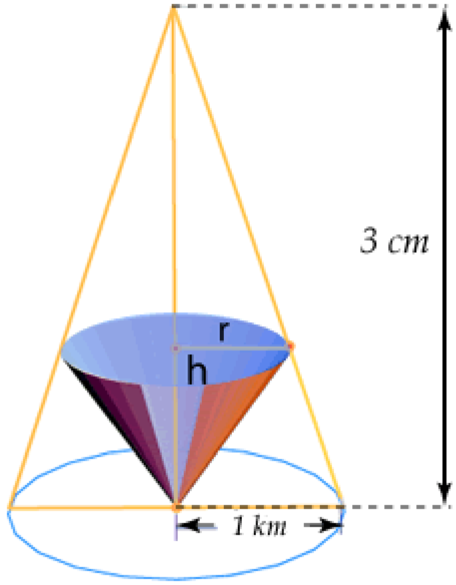



Ver en ambiente 3D

Solución:

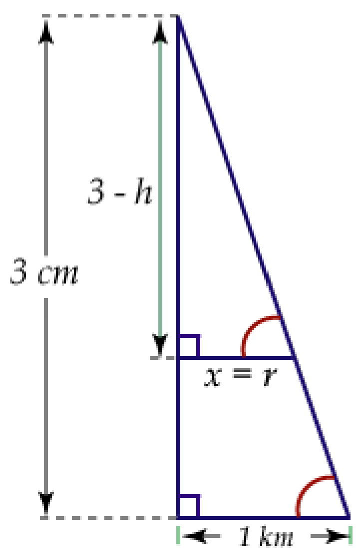
Hay que maximizar el área lateral del cono inscrito.

Las dimensiones de éste son: x radio de la base, h altura y se especifican en la figura de la siguiente manera:




El área lateral de un cono es $A = \pi x L$.

Una ecuación auxiliar se puede obtener por medio de semejanza de triángulos de la siguiente forma:




$$L = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{(3-3x)^2 + x^2} = \sqrt{10x^2 - 18x + 9}$$

Además

Sustituyendo en la ecuación del área lateral $A = \pi x L = \pi x\sqrt{10x^2 - 18x + 9}$

Determinemos los puntos críticos:

$$A'(x) = \pi\sqrt{10x^2 - 18x + 9} + \frac{\pi x(10x - 9)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}}$$

$$A'(x) = \frac{\pi(20x^2 - 27x + 9)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}} = \frac{\pi(4x - 3)(5x - 3)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}}$$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 3)(5x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$, ó $x = \frac{3}{5}$

Por lo tanto, los valores críticos son $x = \frac{3}{4}$ y $x = \frac{3}{5}$

Determinemos cuál de esos valores es un valor máximo utilizando el criterio de la primera derivada.

$$-\infty \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{3}{4} \qquad +\infty$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4x - 3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $5x - 3$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $A'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $A(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Como $A(x)$ crece para $x \in \left]-\infty, \frac{3}{5}\right[$ y decrece para $x \in \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right[$ entonces $x = \frac{3}{5}$ es un valor máximo.

Como $A(x)$ decrece para $x \in \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right[$ y crece para $x \in \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$ entonces $x = \frac{3}{4}$ es un valor mínimo.

Luego el valor que nos interesa es $x = \frac{3}{5}$

Por lo tanto, el radio de la base del cono inscrito es $x = \frac{3}{5}$ cm., y la altura es $h = \frac{6}{5}$ cm.

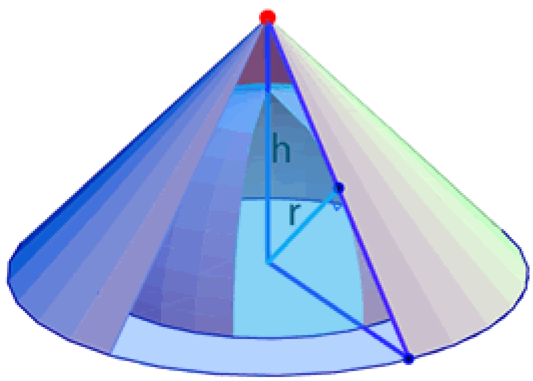
7.
Determinar las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una semiesfera de radio R, de tal forma que el plano de la base del cono coincida con el de la semiesfera.

Solución:

Hay que minimizar el volumen del cono circunscrito.

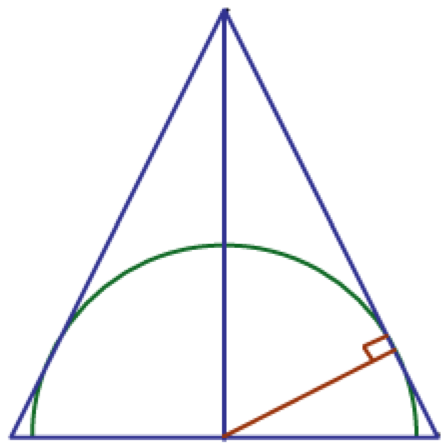
Si el radio de la base del cono es x y su altura es h, su volumen está dado por: $V = \frac{\pi}{3}x^2h$

Gráficamente se tiene:

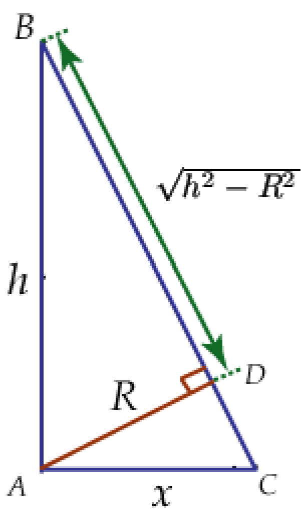



Ver en ambiente 3D

Haciendo un corte transversal se tiene:



Podemos utilizar semejanza de triángulo para obtener una ecuación auxiliar:




$$\triangle ABC \sim \triangle ABD$$

$$\frac{R}{x} = \frac{\sqrt{h^2 - R^2}}{h}$$

de donde $x = \dfrac{hR}{\sqrt{h^2 - R^2}}$

Sustituyendo en la ecuación del volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 h = \frac{\pi}{3} \frac{hR^2}{\sqrt{h^2 - R^2}} \cdot h = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - R^2}$$

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h^2 - 3R^2)}{(h^2 - R^2)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h - \sqrt{3}R)(h + \sqrt{3}R)}{(h^2 - R^2)^2}$$

Utilizando el criterio de la primera derivada, analicemos cuál valor crítico corresponde a un valor mínimo:

| | $-\infty$ , $-\sqrt{3}R$ | $-\sqrt{3}R$ , $0$ | $0$ , $\sqrt{3}R$ | $\sqrt{3}R$ , $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $h^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $h-\sqrt{3}R$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $h+\sqrt{3}R$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $V'(h)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $V(h)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Como $V(h)$ decrece para $x \in ]0, \sqrt{3}R[$ y crece para $x \in ]\sqrt{3}R, +\infty[$ entonces $h = \sqrt{3}R$ corresponde a un valor mínimo que era lo que nos interesaba. Luego, las dimensiones del cono circunscrito a la esfera son: radio de la base $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, altura $h = \sqrt{3}R$

---



**OBSERVACIONES:**

El taller se entregó con un mes de anticipación.

En primera instancia se realizó un primer refuerzo y al final del mes de noviembre se hizo otro refuerzo.

El profesor atendió las dudas de los estudiantes desde el momento que se entregó el taller.