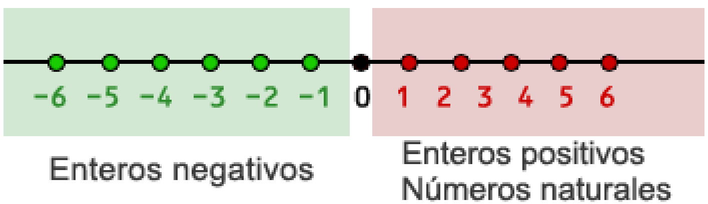
Secretaría de Educación de Medellín
Institución Educativa Fe y Alegría Aures
“Educar para la vida con dulzura y firmeza”

Conceptos de orientación de Matemáticas para la prueba de validación grado 7º

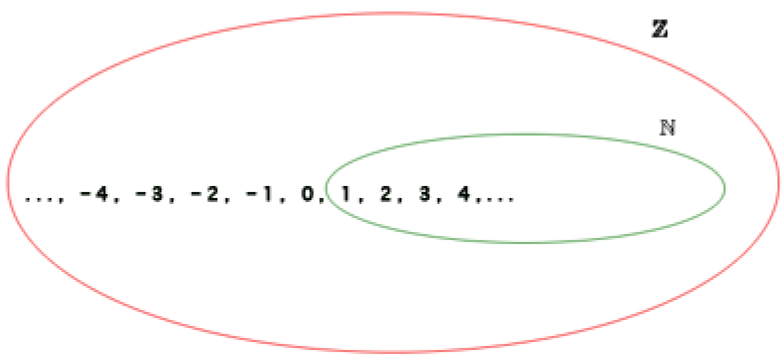
Números Enteros

Con los números naturales no era posible realizar diferencias donde el minuendo era menor que el que el sustraendo, pero en la vida nos encontramos con operaciones de este tipo donde a un número menor hay que restarle uno mayor. La necesidad de representar el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, profundidades con respecto al nivel del mar, etc. Las anteriores situaciones nos obligan a ampliar el concepto de números naturales, introduciendo un nuevo conjunto numérico llamado números enteros.El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, sus opuestos (negativos) y el cero. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Los números enteros se dividen en tres partes:



1 Enteros positivos o números naturales.
2 Enteros negativos.
3 Cero.

Dado que los enteros contienen los enteros positivos, se considera a los números naturales como un subconjunto de los enteros.



<u>Valor absoluto de un número entero</u>

El valor absoluto de un número entero es el número natural que resulta al suprimir su signo. Otra forma de ver el valor absoluto es la distancia entre 0 y este número, la distancia siendo siempre positiva. El valor absoluto lo escribiremos entre barras verticales.

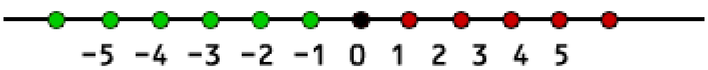
Ejemplo: $|-5| = 5 \quad |5| = 5$

Representación de los números enteros

1 En una recta horizontal, se toma un punto cualquiera que se señala como cero.

2 A su derecha y a distancias iguales se van señalando los números positivos: $1, 2, 3, \ldots$

3 A la izquierda del cero y a distancias iguales que las anteriores, se van señalando los números negativos: $-1, -2, -3, \ldots$



Criterios para ordenar los números enteros

1 Todo número negativo es menor que cero. $-7 < 0$

2 Todo número positivo es mayor que cero. $7 > 0$

3 De dos enteros negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto.

$-7 > -10$, ya que $|-7| < |-10|$

4 De los enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

$10 > 7$, ya que $|10| > |7|$

Propiedades de la resta de números enteros

La resta de números enteros se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo

$$a - b = a + (-b)$$
$$a + b = c$$
$$c - b = a)$$

El **minuendo** c es la suma dada.
El **sustraendo** b es el número conocido.
Resta o **diferencia** a es el resultado.

Propiedades de la resta de números enteros

Interna: La resta de dos números enteros es otro número entero. $a - b \in \mathbb{Z}$

No conmutativa: $a - b \neq b - a$

Suma de números enteros

1 Si los sumandos son del mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le pone el signo común.

2 Si los sumandos son de distinto signo, se restan los valores absolutos (al mayor le restamos el menor) y al resultado se le pone el signo del número de mayor valor absoluto.

Propiedades de la suma de números enteros

Interna: El resultado de sumar dos números enteros es otro número entero

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \ \text{ se cumple que } \ a + b \in \mathbb{Z}$$

Asociativa: El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Conmutativa: El orden de los sumandos no varía la suma. $a+b=b+a$

Elemento neutro: El 0 es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número. $a+0=a$

Elemento opuesto: Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado cero.
$a+(-a)=0$

División de números enteros.

Existen varias cosas que se deben tener presentes cuando se dividen dos números enteros, aquí abordaremos las más importantes, esperando que en adelante sea más familiar su manejo para futuras aplicaciones. En términos generales debemos saber el signo del resultado y el tipo de número que se tiene al dividirlos, además de otras propiedades.

Si tanto dividendo como divisor tienen el mismo signo, el resultado queda positivo, por ejemplo:

$$\frac{10}{5} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Si tanto dividendo como divisor tienen el signo contrario, el resultado queda negativo, por ejemplo:

$$\frac{-10}{5} = \frac{10}{-5} = -\frac{10}{5} = -22$$

Propiedades de la división de números enteros

1. Una de las propiedades más importantes de la división de números enteros, es que el resultado a veces sale del conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$, y se generan elementos racionales $\mathbb{Q}$.

2. Una características que tiene la división de enteros es que no es conmutativa, es decir, intercambiar al dividendo y al divisor entre ellos, se genera un nuevo número. Recordemos que la

propiedad de conmutatividad se refiere a que no importa el orden en que se pongan los números el resultado es siempre el mismo.

Cuando uno de los enteros es el cero debemos tener cuidado ya que se puede generar alguna indeterminación, veamos los tres casos:
- Si el numerador vale cero y el denominador es distinto de cero, entonces el resultado es cero.
- Si el numerador es distinto de cero y el denominador es cero, entonces la fracción no está definida, no existe.
- Si tanto el numerador como el denominador son cero, entonces la fracción está indeterminada.

Cuando la división de dos enteros resulta otro entero, es decir que la división es exacta, significa que el numerador es igual al denominador por el cociente
Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, y la división no es exacta entonces

$$\frac{a}{b} = c \quad \Leftrightarrow \quad a = bc$$

Cuando la división de dos enteros no es exacta significa que el numerador es igual a el cociente por el denominador más el residuo

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} = c \quad \Leftrightarrow \quad a = bc + r$

Multiplicación de números enteros.

<u>Ley de los signos</u>: La multiplicación de **dos números enteros** es igual al producto de los factores y tiene como signo:
De manera general podemos decir que la multiplicación de varios números enteros es otro número entero, que tiene como valor el producto de los valores absolutos y, como signo, el que se obtiene de la aplicación de la regla de los signos.

+ · + = **+**

− · − = **+**

+ · − = **−**

− · + = **−**

Propiedades de la multiplicación

Interna: El resultado de multiplicar dos números enteros es otro número entero. $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Asociativa: El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son números enteros cualesquiera, se cumple que: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Conmutativa: El orden de los factores no varía el producto. $a \cdot b = b \cdot a$

Elemento neutro: El 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque todo número multiplicado por él da el mismo número. $a \cdot 1 = a$

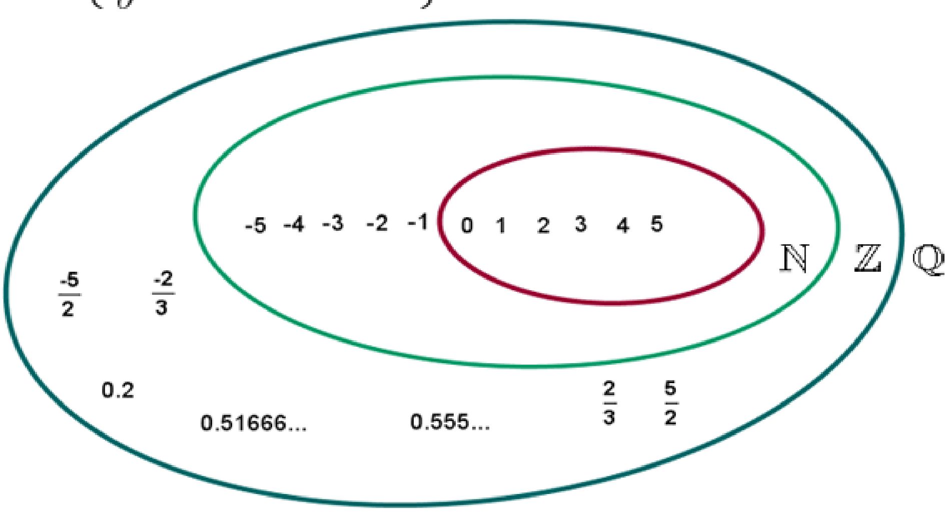
Distributiva: El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Sacar factor común: Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.
Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor. $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

NÚMEROS RACIONALES.

Un **número racional** es todo número que puede representarse como el **cociente** de **dos enteros**, con denominador distinto de cero. Se representa por $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$



Suma y resta de números racionales: La suma (resta) de números racionales se realiza en función de sus denominadores: si tienen el mismo o diferente denominador.

Con el mismo denominador: Se suman o se restan los numeradores y se mantiene el denominador.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Con distinto denominador: En primer lugar se reducen los denominadores a común denominador, y se suman o se restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\frac{a(m.c.m.(b,d))}{b} + \frac{c(m.c.m.(b,d))}{d}}{m.c.m.(b,d)}$$

Propiedades de la suma de números racionales: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Q}$ se satisfacen las siguientes propiedades

Interna. La suma de números racionales es de nuevo un número racional $a + b \in \mathbb{Q}$

Asociativa. Sumar los dos primeros números y al resultado añadir un tercer número, es igual a que al primer número se le añada el resultado de la suma del segundo con el tercer número.

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Conmutativa. Si se intercambian los sumandos, el resultado es el mismo.

$$a+b=b+a$$

Elemento neutro. Existe un elemento $0 \in \mathbb{Q}$ tal que al sumarlo con un número el resultado sigue siendo el mismo número. $a+0=a$

Elemento opuesto. Todo número racional posee un opuesto, tal que al sumar ambos el resultado es el elemento neutro. $a+(-a)=0$

Multiplicación de números racionales: El resultado de multiplicar dos números racionales es de nuevo un racional cuyo numerador se obtiene de la multiplicación de los numeradores y el denominador de la multiplicación de los denominadores

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

División de números racionales: El resultado de dividir dos números racionales es de nuevo un racional cuyo numerador se obtiene multiplicando los extremos y el denominador de multiplicar los medios

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Potencias de exponente entero y base racional: Consiste en elevar el numerador y denominador a la potencia dada. En caso de que la potencia sea negativa, el resultado es el inverso de la base elevado a la potencia positiva, esto es, para $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

ESTADÍSTICA

La estadística es la ciencia de la sistematización, recogida, ordenación y presentación de los datos referentes a un fenómeno que presenta variabilidad o incertidumbre para su estudio metódico, con objeto de deducir las leyes que rigen esos fenómenos y poder hacer previsiones sobre los mismos, tomar decisiones u obtener conclusiones.

Población: Conjunto de todos los elementos que verifican una característica que será objeto de estudio.
Individuo: Cada uno de los elementos de la población.
Muestra: Cualquier subconjunto de la población. Este subconjunto es muy importante que sea representativo de la población.
Carácter: Cada una de las propiedades que poseen los individuos de la población y que pueden ser objeto de estudio. La definición de carácter debe ir acompa

VARIABLES

Una variable es una característica observable que varía entro los diferentes individuos de una población. La información que disponemos de cada individuo es resumida en *variables.*
Dato: es un valor particular de la variable.

Las variables que se observan y analizan pueden ser de dos tipos:

a) Variable cualitativa o atributo: no se pueden medir numéricamente, representan características o atributos de las variables (por ejemplo: nacionalidad, sexo, religión). Se pueden clasificar en:

Nominales: Son aquellas en los que los valores no se pueden ordenar. Por ejemplo, la nacionalidad de una persona.

Ordinales: Son aquellas en las cuales sus valores se pueden ordenar. Por ejemplo, la intensidad de un dolor.

b) Variable cuantitativa: tienen valor numérico (edad, altura, precio de un producto, ingresos anuales).
Se pueden clasificar atendiendo a los valores que pueden tomar:
Discretas: sólo pueden tomar valores enteros.
Continuas: pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo.

Tablas de frecuencias: Cuando se hace un estudio estadístico se obtiene una gran cantidad de datos numéricos. Para tener una información clara y organizada de lo obtenido en el estudio se utilizan las tablas de frecuencias.

Autos vendidos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frec. relativa acumulada	Frecuencia porcentual	Frec. porcentual acumulada
0	8	8	0,267	0,267	26,7%	26,7%
1	7	15	0,233	0,500	23,3%	50,0%
2	7	22	0,233	0,733	23,3%	73,3%
3	5	27	0,167	0,900	16,7%	90,0%
4	3	30	0,100	1	10,0%	100%
Total	30		1		100%	

La tabla de frecuencias (o distribución de frecuencias) es una tabla que muestra la distribución de los datos mediante sus frecuencias. Se utiliza para variables cuantitativas o cualitativas ordinales.

Esta tabla está compuesta por las siguientes columnas:

Distribución de frecuencias

1. ***Frecuencia Absoluta de un dato***: Es el número de veces que se repite ese dato. La denotaremos por ***f***.

2. ***Frecuencia Absoluta Acumulada***: es la suma de las frecuencias absolutas de todos los datos anteriores, incluyendo también la del dato mismo del cual se desea su frecuencia acumulada.

3. Frecuencia acumulada. La última frecuencia absoluta acumulada deberá ser igual al número total de datos. La denotaremos por ***F***.

4. ***Frecuencia Relativa***: se obtiene al dividir la frecuencia absoluta de cada dato entre el número total de datos. La denotamos por ***hi***.

5. ***Frecuencia Relativa Acumulada***: es la suma de las frecuencias relativas de todos los datos anteriores, incluyendo también la del dato mismo del cual se desea su frecuencia relativa acumulada. La última frecuencia relativa acumulada deberá ser igual a la unidad. La denotaremos por ***Hi.***

6. ***Frecuencia porcentual:*** es el porcentaje de elementos que pertenecen a una clase o categoría. Se puede calcular rápidamente multiplicando la frecuencia relativa por 100%.

7. ***Frecuencia porcentual acumulada:*** es el porcentaje de datos respecto al total que se han reportado hasta ese momento. Se puede calcular rápidamente multiplicando la frecuencia relativa acumulada por 100%.

GRÁFICAS ESTADÍSTICAS

Los datos numéricos obtenidos en un estudio estadístico pueden presentarse de forma visual a través de gráficas estadísticas, lo que hace que sean más fácilmente comprensibles.
Hay muchos tipos de gráficas, las más comunes son:

Diagrama de barras

Hemos encuestado a 50 estudiantes del colegio sobre su deporte favorito:
Los resultados se han organizado en una tabla de frecuencias. Se representan gráficamente mediante un diagrama de barras para obtener una visualización general de los resultados de nuestra encuesta.

Deporte preferido	Frecuencia absoluta
Baloncesto	12
Fútbol	8
Balonmano	10
Tenis	6
Atletismo	3
Voleibol	5
Natación	6
TOTAL	50

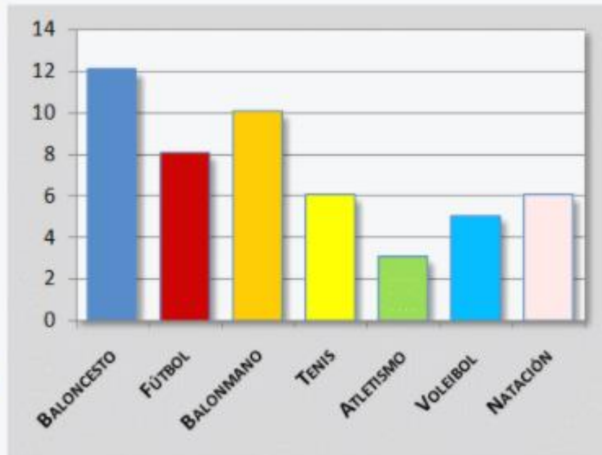
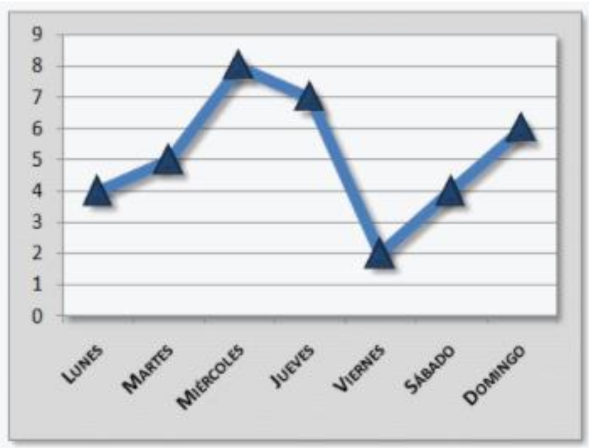


Diagrama de líneas (polígono de frecuencias).

El proceso es muy similar al empleado en los gráficos de barras:

- En el eje horizontal, abscisas, se representan los datos.
- En el eje vertical, ordenadas, se representan los valores de cada dato si la variable es cuantitativa o la frecuencia de cada dato si la variable es cualitativa.
- Se trazan puntos o marcas que representan esos datos y se unen con segmentos.

Días	Temperatura mínima ºC
Lunes	4
Martes	5
Miércoles	8
Jueves	7
Viernes	2
Sábado	4
Domingo	6



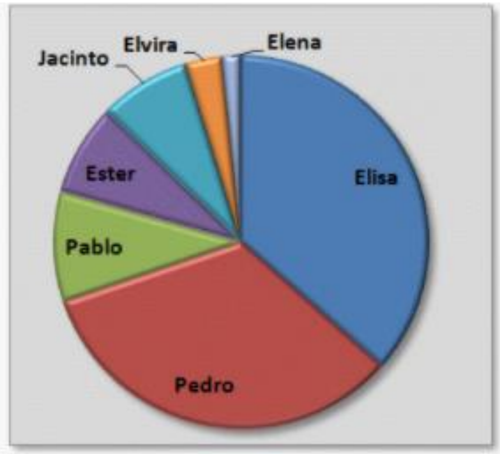
En este ejemplo hemos tomado las temperaturas mínimas durante una semana de la estación meteorológica del colegio y lo hemos representado como una línea poligonal que nos indica muy bien las variaciones.

Diagrama de sectores

En un diagrama de sectores cada dato viene representado mediante un sector circular cuyo ángulo es proporcional a su frecuencia absoluta. El ángulo del sector se calcula dividiendo 360 (los grados de un círculo completo) entre el número de datos y multiplicando el resultado por la frecuencia de cada dato. La fórmula para hallar estos cálculos es la siguiente:

Candidato	Votos
Elisa	23
Pedro	21
Pablo	6
Ester	5
Jacinto	5
Elvira	2
Elena	1
TOTAL	63

Resultados de las elecciones



$$\text{Ángulo del sector} = \frac{360}{\text{nº datos}} \times \text{frecuencia de cada dato}$$

Se construye cada sector con un transportador de ángulos.

Pictogramas

El pictograma es un gráfico estadístico que se suele utilizar para caracteres cualitativos y que, en lugar de barras para representar las frecuencias, utiliza dibujos o gráficos alusivos a cada atributo y cuya dimensión sea proporcional a la frecuencia absoluta.

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

A los parámetros o medidas estadísticas que informan sobre la tendencia habitual o central de los datos de una distribución se les denomina en estadística medidas de tendencia central.

<u>Media aritmética</u>. Se define como la suma de todos los datos dividida entre el número total de estos.

<u>Mediana</u>. La mediana es aquel valor de la variable estadística que deja el 50% de observaciones inferiores a él; la mediana divide en dos partes iguales a la distribución estadística.

Dentro de las propiedades de la mediana se pueden destacar:

1. Como medida descriptiva no se ve tan afectada como la media por la presencia de valores extremos.
2. Es de cálculo rápido y de fácil interpretación.

<u>Moda</u> Se define la moda como el valor de la variable estadística que tiene la frecuencia absoluta más alta. Si existen varios valores con esta característica, entonces se dice que la distribución tiene varias modas (plurimodal).