GUIA DIDACTICA PARA EL SEGUNDO PERIODO
MATEMATICAS GRADO 8° - 2022
DOCENTE: JOSE MANUEL BERRIO
I.E. YERMO Y PARRES

Situando las matemáticas como eje principal en la solución de problemas cotidianos, se les dará un significado diferente a los contenidos a desarrollar en este segundo periodo teniendo en cuenta la situación actual que vive la humanidad y buscando que se lleve al estudiante a asociar la matemática con la tecnología para que aproveche todos los recursos en su beneficio para su propio aprendizaje.

Los temas a desarrollar en este periodo están relacionados con las expresiones algebraicas y sus operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división para luego manejar los producto notables en el ámbito algebraico y el trabajo de las rectas y puntos notables de los triángulos como también la congruencia y semejanza de triángulos en el ámbito de la geométrico, con los cuales espero se conlleve al estudiante a la solución de problemas guiados con la utilización de herramientas tecnológicas y el aprovechamiento de la informática.

Se espera el compromiso directo de los estudiantes y padres de familia para acompañar a sus hijos en su aprendizaje para que este sea efectivo y responsable creando entre todos valores de responsabilidad, honestidad y compromiso con su propia formación.

CONTENIDO

INTRODUCCION

El álgebra como complemento de la aritmética, es la rama de las matemáticas que tiene como fin generalizar las operaciones aritméticas mezclando números, letras y signos, es muy útil para resolver problemas de la vida diaria en la cual se encuentran inmersas varias incógnitas. normalmente se utilizan las últimas letras del abecedario (x, y, z, w) para representar variables y las primeras (a, b, c) para representar constantes.

La historia del algebra tuvo sus inicios en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones lineales ($y = mx + b$) y cuadráticas ($ax^2 + bx = c$).

El precursor del algebra moderna fue el matemático griego Diofanto de Alejandría, quien publicó la obra "Ars magna", en la que se trataron de una forma rigurosa no sólo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería la teoría de ecuaciones".

En el siguiente video "Los orígenes del algebra", en un recorrido histórico para definir lo que es algebra y su significado, teniendo sus orígenes en la antigua Babilonia 2000 AC, pasando por el año 280 de la era actual en Alejandría, donde aparece el matemático griego Diofanto, posteriormente en el año 580 DC aparece el matemático hindú Brahmagrupta, quien hace grandes contribuciones al algebra y posteriormente aparece Al-Kwarismi, quien sentó las bases de lo que ahora conocemos como álgebra, orientada desde el punto de vista de la abstracción.(Khan, 2013).

1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **variable** es una letra que representa a cualquier número de un conjunto dado de números. Si empezamos con variables *x,y,z* y algunos números reales, y los combinamos usando la resta, multiplicación, división, potencias y raíces obtenemos una **expresión algebraica**.

Ejemplo 1: Expresiones algebraicas

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y + 4}$$

1.1 Monomio

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde *a*, es el coeficiente y por lo general un número real, la *x* representa la variable y la *k* el exponente dela expresión algebraica. Dicho valor representa el grado del polinomio y la cantidad de términos su nombre.

Expresión	Nombre	Grado
$2x^2$	Monomio	2
$3x + 4$	Binomio	1
$2x^2 - 3x + 4$	Trinomio	2
$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$	Polinomio	4

1.2 Polinomio

Un polinomio de grado *n* en la variable *x* es cualquier expresión algebraica de la forma, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$ $con\ a_n \neq 0$, donde n es un número no negativo y $a_i i = 0{,}1$ ..., n son números reales.

2 PROPIEDADES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRICAS

Las operaciones de suma y producto definidas en las expresiones algebraicas (números y letras – variables), cumplen las mismas propiedades de los números los reales. Veamos algunas de ellas: Sean a, b y c números reales cualesquiera.

Propiedades	Suma	Producto
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a$
Existencia del inverso	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1,\ si\ a \neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$	

Ejemplo 2: Propiedades de las expresiones algebraicas

Propiedades	Suma	Producto
Asociativa	$5x + (6y + 7) = (5x + 6y) + 7$ $5x + 6y + 7 = 5x + 6y + 7$	$5x \cdot (6y \cdot 7) = (5x \cdot 6y) \cdot 7$ $5x \cdot (42y) = (30xy) \cdot 7$ $210xy = 210xy$
Conmutativa	$5x + 6y = 6y + 5x$	$5x \cdot 6y = 6y \cdot 5x$ $30xy = 30yx$
Elemento neutro	$5x + 0 = 0 + 5x$ $5x = 5x$	$5x \cdot 1 = 1 \cdot 5x$ $5x = 5x$
Existencia del inverso	$5x + (-5x) = (-5x) + 5x$ $5x - 5x = -5x + 5x$ $0 = 0$	$5x \cdot \frac{1}{5x} = \frac{1}{5x} \cdot 5x = 1$ $\frac{5x}{5x} = \frac{5x}{5x} = 1$ $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$7 \cdot (5x + 6y) = 35x + 42y$	

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Sea $P(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ y $Q(x) = 6x^2 + 2x + 4$

3.1 Adición.

Ejemplo 1: Adición de polinomios $P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^3 - \underline{6x^2} + 2x + 4 \\ \underline{6x^2} + 2x + 4 \\ \hline x^3 \qquad + 4x + 8 \end{array}$$

3.2 Sustracción

Ejemplo 2: Sustracción de polinomios $P(x) - Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + \underline{2x} + \underline{4} \\ -6x^2 - \underline{2x} - \underline{4} \\ \hline x^3 - 12x^2 \qquad\qquad \end{array}$$

3.3 Producto de dos polinomios

Ejemplo 3: Producto de dos polinomios $P(x) \cdot Q(x)$. Se aplica la propiedad distributiva

$$(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) \cdot (6x^2 + 2x + 4)$$

$$\begin{array}{r} 6x^5 + 2x^4 + 4x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ -36x^4 - 12x^3 - 24x^2 \qquad\qquad \\ 12x^3 + 4x^2 + 8x \qquad \\ 24x^2 + 8x + 16 \\ \hline 6x^5 - 34x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 16x + 16 \end{array}$$

TALLER

Con base en lo estudiado, lo que practicaste con la escena interactiva anterior y guiándote con los ejemplos 1 al 3, procede a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar las siguientes adiciones o sustracciones de las expresiones algebraicas: $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 4}$, $\mathbf{Q(x) = 6x^2 + 2x + 4}$ **y** $\mathbf{R(x) = -2x^2 + 4x - 5}$			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $\boldsymbol{P(x) + Q(x) + R(x)}$	$x^3 - 2x^2 + 8x + 3$	2. $\boldsymbol{P(x) + Q(x)}$	$x^3 + 4x + 8$
3. $\boldsymbol{P(x) + R(x)}$	$x^3 - 8x^2 + 6x - 1$	4. $\boldsymbol{Q(x) + R(x)}$	$4x^2 + 6x - 1$
5. $[\boldsymbol{P(x) + R(x) + Q(x) + R(x)}]$	$x^3 - 4x^2 + 12x - 2$	6. $\boldsymbol{P(x) - Q(x) - R(x)}$	$x^3 - 10x^2 - 4x + 5$
7. $\boldsymbol{P(x) - Q(x)}$	$x^3 - 12x^2$	8. $\boldsymbol{P(x) - R(x)}$	$x^3 - 4x^2 - 2x + 9$
9. $\boldsymbol{Q(x) - R(x)}$	$8x^2 - 2x + 9$	10. $[\boldsymbol{P(x) + R(x)}] - [\boldsymbol{Q(x) + R(x)}]$	$x^3 - 12x^2$
Realizar los productos de las siguientes expresiones algebraicas:			

DADOS LOS POLINOMIOS; $\mathbf{P(x) = x + 1}$, $\mathbf{Q(x) = x - 1}$ **y** $\mathbf{R(x) = 2x^2 + 4x - 5}$, CALCULAR:			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
11. $\boldsymbol{P(x) * Q(x)}$	$x^2 - 1$	12. $\boldsymbol{P(x) * P(x)}$	$x^2 + 2x + 1$
13. $\boldsymbol{Q(x) * Q(x)}$	$x^2 - 2x + 1$	14. $\boldsymbol{P(x) * P(x) * P(x)}$	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
15. $\boldsymbol{Q(x) * Q(x) * Q(x)}$	$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	16. $\boldsymbol{P(x) * Q(x) * R(x)}$	$2x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 5$
17. $\boldsymbol{P(x) * R(x)}$	$2x^3 + 6x^2 - x - 5$	18. $\boldsymbol{Q(x) * R(x)}$	$2x^3 + 2x^2 - 9x + 5$
19. $\boldsymbol{P(x) * Q(x) * Q(x) * Q(x)}$	$x^4 - 2x^3 + 2x - 1$	20. $[P(x) * Q(x)][P(x) * P(x)]$	$x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

PRODUCTOS NOTABLES

Ciertos productos de binomios se presentan con tanta frecuencia que debe aprender a reconocerlos. Empezamos con el producto de dos binomios $ax + b$ y $cx + d$

4.1 Producto de dos binomios

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Ejemplo 1: Producto de dos binomios

a. $(x + 3)(x + 2)$

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 2) &= x^2 + (3 + 2)x + 3 \cdot 2\\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

b. $(5x + 3)(2x + 2)$

$$\begin{aligned}(5x + 3)(2x + 2) &= (5 \cdot 2)x^2 + (5 \cdot 2 + 3 \cdot 2)x + 3 \cdot 2\\ &= 10x^2 + (10 + 6)x + 6\\ &= 10x^2 + 16x + 6\end{aligned}$$

4.2 Cuadrado de un binomio $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2$

$$(a \pm b)^2 = (a)^2 \pm 2(a) \cdot (b) + (b)^2$$

Ejemplo 2: Cuadrado de un binomio

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 &= (x^2)^2 + 2(x^2) \cdot (y^2) + (y^2)^2\\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)^2 &= (x^2)^2 - 2(x^2) \cdot (y^2) + (y^2)^2\\ &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4\end{aligned}$$

4.3 Producto de la suma por la diferencia

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 3: Producto de la suma por la diferencia

4.4 Cubo de un binomio $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^3$

$$(a \pm b)^3 = (a)^3 \pm 3(a)^2 \cdot (b) + 3(a) \cdot (b)^2 \pm (b)^3$$

Ejemplo 4: Cubo de un binomio

a. $(x + 2)^3 = (x)^3 + 3(x)^2 \cdot (2) + 3(x) \cdot (2)^2 + (2)^3$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

b. $(x-2)^3=(x)^3-3(x)^2\cdot(2)+3(x)\cdot(2)^2(2)^3=x^3-6x^2+12x-8$

4.5 Trinomio cuadrado $(x+y+c)^2$

$$(x+y+c)^2=x^2+2xy+y^2+2y(c)+2xc+c^2$$

Ejemplo 5: Trinomio cuadrado

$$(x+y+9)^2=x^2+2xy+y^2+2y(9)+2x(9)+9^2$$
$$=x^2+2xy+y^2+18y+18x+81$$

4.6 Suma de Cubos a^3+b^3

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Ejemplo 6: Suma de cubos

$$8x^3+27y^3=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$$

4.7 Diferencia Cubos a^3-b^3

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Ejemplo 7: Diferencia de cubos

$$8x^3-27y^3=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$$

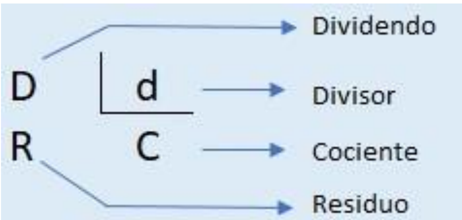
Con base en lo estudiado y guiándose con los ejemplos 6 al 12, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

Realizar los siguientes productos notables de expresiones algebraicas			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $(3x+5)^2$	$9x^2+30x+25$	2. $(x^2-2)^3$	$x^6-6x^4+12x^2-8$
3. $(2x-\sqrt{y})(2x+\sqrt{y})$	$4x^2-y$	4. $(\sqrt{h^2+1}+1)(\sqrt{h^2+1}-1)$	h^2
5. $(\sqrt{a}+\frac{1}{b})(\sqrt{a}-\frac{1}{b})$	$(a-\frac{1}{b^2})$	6. $(5s-t)^2$	$25s^2-10st+t^2$
7. $(1-2y)^3$	$1-6y+12y^2-8y^3$	8. $(3a-b^2)(9a^2+3ab^2+b^4)$	$27a^3-b^6$
9. $(5x+y^2)(25x^2-5xy^2+y^4)$	$125x^3+y^6$	10. $(1+\frac{1}{x})-(1-\frac{1}{x})$	$\frac{4}{x}$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Antes de intentar realizar una división de polinomios, es conveniente recordar los términos de la división.

Algoritmo de división para polinomios	Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $\mathrm{r}(x)$tales que $f(x) = p(x) \cdot q(x) + \mathrm{r}(x),$
	donde ya sea $\mathrm{r}(x) = 0$ o el grado de $\mathrm{r}(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el cociente y $\mathrm{r}(x)$ es el residuo en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.



La división establece cuantas veces está contenido el divisor en el dividendo, esto es el cociente C.

5.1 Propiedades de la división de polinomios

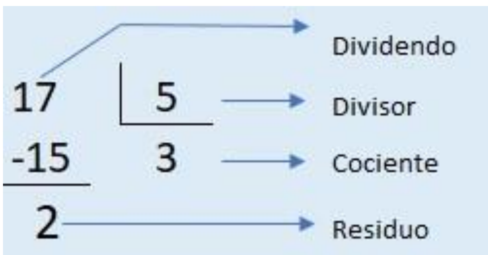
- En toda división el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.
- En toda división el grado del divisor es mayor que el grado del residuo.
- En toda división el grado máximo del residuo es igual al grado del divisor menos uno.

5.2 Prueba de la división

Al producto del cociente (C) por el divisor (d), se le suma el residuo (R) y tiene que ser igual al dividendo (D).

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}$$

Ejemplo 1: Prueba de la división $\frac{17}{5}$



Prueba:

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{D} = (\mathbf{3} \cdot \mathbf{5}) + \mathbf{2} = \mathbf{15} + \mathbf{2} = \mathbf{17}$$

Teniendo en cuenta estos conceptos, podemos realizar la división de polinomios.

Observa que, en la división se busca un número en el cociente (C) que al multiplicarlo por el divisor (d), sea igual o se acerque al dividendo. En el ejemplo anterior, el número que más se acerca es el tres, ya que $(5 \cdot 3) = 15$ y es el que más se acerca al 17. Tienes que tener en cuenta que el producto 15, pasa con signo contrario.

Existen dos formas de hacer la división, una es la división larga y la otra la división sintética.

5.3 División larga o Euclidiana

Esta forma de división permite que el divisor sea de un grado superior a uno, mientras que la división sintética, sólo permite que el divisor sea de grado uno (1). Para el ejemplo que se presenta no se puede hacer la división sintética.

Ejemplo 2: División larga

$\frac{-9x^4+9x^3-14x^2+8x}{3x^2-2x}$, siempre que vayas a realizar una división de polinomios, debes tener en cuenta ordenar tanto el dividendo (numerador) como el denominador (divisor) de mayor a menor grado y en caso de que falte uno, deja un espacio que puedes llenar con un cero.

En el ejemplo que se plantea, observa que el polinomio está ordenado 4,3,2,1 para el dividendo y 2,1 para el divisor.

$$
\begin{array}{r|l}
-9x^4+9x^3-14x^2+8x & 3x^2-2x \\
\cline{2-2}
+9x^4-6x^3 & -3x^2+x-4 \\
\cline{1-1}
0+3x^3-14x^2+8x & \\
-3x^3+2x^2 & \\
\cline{1-1}
0-12x^2+8x & \\
+12x^2-8x & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Nota: Para este ejemplo en particular, se había podido sacar factor común "x" en el numerador y denominador, luego simplificar y se puede resolver por división sintética.

Prueba de la división:

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{d}) + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}$$

$$(\mathbf{-3x^2+x-4}) \cdot (\mathbf{3x^2-2x}) + \mathbf{0} = \mathbf{-9x^4+9x^3-14x^2+8x}$$

Comprobemos aplicando la propiedad distributiva:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{-9x^4+6x^3} \\
\qquad \mathbf{+3x^3-2x^2} \\
\qquad\qquad \mathbf{-12x^2+8x} \\
\hline
\mathbf{-9x^4+9x^3-14x^2+8x+0}
\end{array}
$$

5.4 División Sintética

Descrita por Paolo Ruffini en 1816, es conocida como la regla de Ruffini y facilita el cálculo de la división de cualquier polinomio entre un binomio de la forma (x-a), es decir, el divisor es de grado uno.

Ejemplo 3: División sintética

$\frac{x^3-2x^2+5x+3}{x-2}$, para este ejercicio se pueden hacer las dos formas de división, dado que el divisor es de grado 1.

	3	0	-7	5
2		6	12	10
	3	6	5	15 Residuo

Cociente

$3x^2 + 6x + 5$

Ejemplos 4: La división sintética comparada con la división larga

División Larga o Euclidiana	División Sintética

$$\begin{array}{rl} 3x^3 + 0x^2 - 7x + 5 & \underline{\lvert\ x-2 \quad} \\ \underline{-3x^3 + 6x^2 \qquad\qquad} & 3x^2+6x+5 \\ 0 + 6x^2 - 7x + 5 & \\ \underline{-6x^2 + 12x \qquad} & \\ 0 + 5x + 5 & \\ \underline{-5x + 10} & \\ 0 + 15 & \end{array}$$

	3	0	-7	5
2		6	12	10
	3	6	5	15 Residuo

Cociente

$3x^2 + 6x + 5$

Observa que en la división sintética para obtener el cociente se le bajó un grado al polinomio, por haber divido por $x - 2$, esto es $\frac{x^3}{x} = x^2$

Prueba de la división:

$$\boldsymbol{D = (C \cdot d) + R}$$

$$\boldsymbol{D} = (3x^2 + 6x + 5) \cdot (\boldsymbol{x - 2}) + \mathbf{15}$$

Aplicamos la ley distributiva

$$\boldsymbol{D = 3x^3 + \cancel{6x^2} + 5x - \cancel{6x^2} - 12x - 10 + 15}$$

Sumamos términos semejantes

$$\boldsymbol{D = 3x^3 - 7x + 5}$$

Con base en lo estudiado, con la práctica de la escena anterior y guiándose con los ejemplos 13 y 16, proceda a resolver los siguientes ejercicios propuestos, los cuales tienen las respuestas para que confrontes tus resultados.

EJERCICIOS:

Realizar la división de las siguientes expresiones algebraicas por el método apropiado			
Ejercicio	**Respuesta**	**Ejercicio**	**Respuesta**
1. $(6x^2 - 26x + 12) \div (x - 4)$	Cociente: $6x - 2$ Residuo: 4	2. $(8x^4 + 6x^2 - 3x + 1) \div (2x^2 - x + 2)$	Cociente: $4x^2 + 2x$ Residuo: $-7x + 1$
3. $(3a^{x+5} + 19a^{x+3} - 10a^{x+4} - 8a^{x+2} + 5a^{x+1}) \div (a^2 - 3a + 5)$	Cociente: $3a^{x+3} - a^{x+2} + a^{x+1}$ Residuo: 0	4. $(-3x^4 + 2x^3 + 23x^2 + 14x - 8) \div (x^2 - 2x - 4)$	Cociente: $3x^2 - 4x + 3$ Residuo: $4x + 4$
5. $(x^3 + 2x^2 - 4x + 5) \div (x + 3)$	Cociente: $x^2 - x - 1$ Residuo: 8	6. $(4x^3 + 6x^2 + 5x + 6) \div (2x^2 + x + 3)$	Cociente: $2x + 2$ Residuo: $-3x$
7. $(2x^3 + 4x^2 + 2x + 4) \div (2x^2 + x + 4)$	Cociente: $x + \frac{3}{2}$ Residuo: $-\frac{7}{2}x - 2$	8. $(x^3 + 3x^2 - 6x + 4) \div (-x^2 - 2x + 7)$	Cociente: $-x - 1$ Residuo: $-x + 11$
9. $(4x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (2x^2 + x + 6)$	Cociente: $2x + 2$ Residuo: $-3x - 9$	10. $(2x^3 - 2x^2 + 4x + 6) \div (-x^2 - 5x + 5)$	Cociente: $-2x + 12$ Residuo: $74x - 54$