UNIDAD DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS - GRADO 10°

Martha Juliet Valencia Villa- Erika Johana Arboleda Tamayo

TEMA: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS		
OBJETIVOS ✓ Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. ✓ Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas. ✓ Resolver triángulos no rectángulos, aplicando ley de seno y coseno.		
REQUISITOS PREVIOS: ✓ Conjuntos numéricos. ✓ Clasificación de triángulos. ✓ Propiedades de los triángulos. ✓ Teorema de Pitágoras. ✓ Desigualdad triangular. ✓ Medición de ángulos en grados y radianes.		
CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:		
CONCEPTOS	**PROCEDIMIENTOS**	**ACTITUDES**
✓ Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. ✓ Razones trigonométricas de ángulos notables. ✓ Resolución de triángulos rectángulos. ✓ Ángulos de elevación y ángulo de depresión. ✓ Aplicaciones a triángulos rectángulos. ✓ Teorema del seno ✓ Teorema del coseno.	✓ Participa del trabajo individual y en familia de una manera comprometida y responsable. ✓ Utiliza las herramientas tecnológicas como fuente de información, para complementar los conocimientos. ✓ Resuelve situaciones problema aplicando los conceptos vistos. ✓ Consigna los contenidos de la unidad didáctica de	✓ Demuestra interés por aprender. ✓ Desarrolla y practica las actividades propuestas en la unidad didáctica. ✓ Propone estrategias para la construcción y apropiación del conocimiento. ✓ Presenta sus trabajos en forma oportuna y responsable. ✓ Asume una actitud de confianza frente a las propias capacidades para

	manera coherente y cohesiva. ✓ Plantea estrategias para mejorar los procesos fundamentales. ✓ Desarrolla las actividades propuestas en la unidad didáctica y supera sus insuficiencias cognitivas. ✓ Leer cuidadosamente la unidad didáctica.	la comprensión de la unidad didáctica.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS:

- ✓ Explicación de los conceptos con dos o tres ejemplos.
- ✓ Talleres en forma individual y en grupo.
- ✓ Actitud en clase, se tiene en cuenta también la excusa cuando faltan a clase.
- ✓ Evaluación individual y en grupo.

ACTIVIDADES:

A. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

Considere un triángulo rectángulo con α como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue (véase la figura 1).

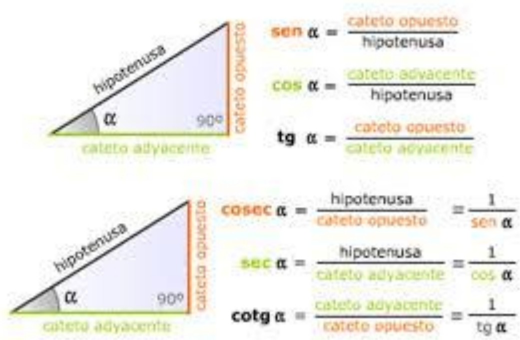
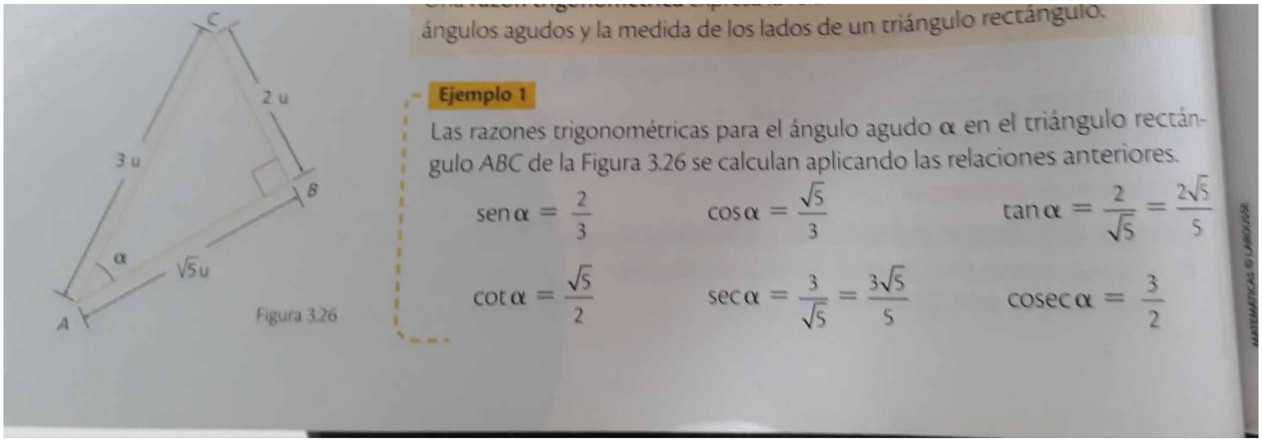


figura 1

Los símbolos que se usan para estas relaciones son abreviaturas para sus nombres completos: seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente. Puesto que dos triángulos rectángulos con ángulo α son similares, estas relaciones son las mismas, sin importar el tamaño del triángulo; las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo α (véase la figura 2)

Ejemplo 1.



ángulos agudos y la medida de los lados de un triángulo rectángulo.

Ejemplo 1

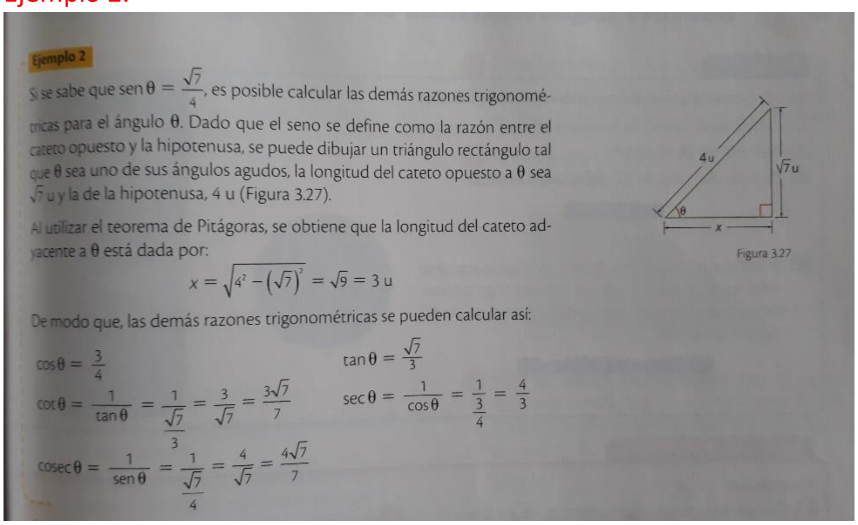
Las razones trigonométricas para el ángulo agudo α en el triángulo rectángulo ABC de la Figura 3.26 se calculan aplicando las relaciones anteriores.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{3}{2}$$

Figura 3.26

Ejemplo 2.



Ejemplo 2

Si se sabe que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, es posible calcular las demás razones trigonométricas para el ángulo θ. Dado que el seno se define como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, se puede dibujar un triángulo rectángulo tal que θ sea uno de sus ángulos agudos, la longitud del cateto opuesto a θ sea $\sqrt{7}$ u y la de la hipotenusa, 4 u (Figura 3.27).

Al utilizar el teorema de Pitágoras, se obtiene que la longitud del cateto adyacente a θ está dada por:

$$x = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{9} = 3\text{ u}$$

De modo que, las demás razones trigonométricas se pueden calcular así:

$$\cos\theta = \frac{3}{4} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

Figura 3.27

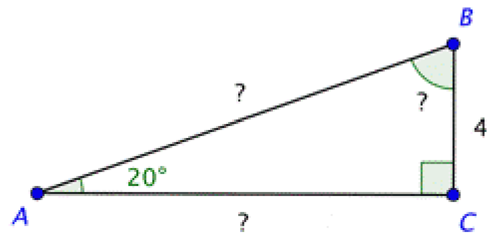
Para resolver los ejercicios de las razones trigonométricas es importante tener en cuenta: debe ser un triángulo rectángulo, identificar el ángulo agudo al cual aplicarlo.

Se deben dar dos lados, luego aplicar el teorema de Pitágoras, para lo cual debe tener dos lados.

https://www.youtube.com/watch?v=FUMlQtJfrHo&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1

Ejemplo 3.

Supongamos que debes construir una rampa y no sabes qué tan larga debe ser. Conoces ciertas medidas de ángulos y longitudes de lados, pero necesitas encontrar la información faltante.

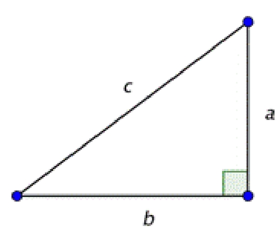


Hay seis funciones trigonométricas que puedes usar para calcular lo que no conoces. Ahora aprenderás a usar dichas funciones para resolver problemas que involucran triángulos rectángulos.

Usar el Teorema de Pitágoras en Problemas de Trigonometría

Hay varias formas de determinar la información desconocida en un triángulo rectángulo. Una de estas formas es el **Teorema de Pitágoras**, que dice $a^2+b^2=c^2$.

Supongamos que tienes un triángulo rectángulo en el que *a* y *b* son las longitudes de sus catetos y *c* es la longitud de la hipotenusa, como se muestra abajo.



Si conoces la longitud de dos de los lados, entonces puedes usar el Teorema de Pitágoras ($a^2+b^2=c^2$) para calcular la longitud del tercer lado. Una vez que conoces todos los lados, puedes usar todas las funciones trigonométricas.

Solución:

$\hat{B}$= 90° - 20°, por que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suma 180°.
Para encontrar alguno de los lados restantes es necesario usar las razones trigonométricas,
¿Hallaremos el lado b=?

$$\tan 70° = \frac{b}{4}$$

4tan 70° = b

b = 10.98

b=11

usando el teorema de Pitágoras para hallar el lado c =?

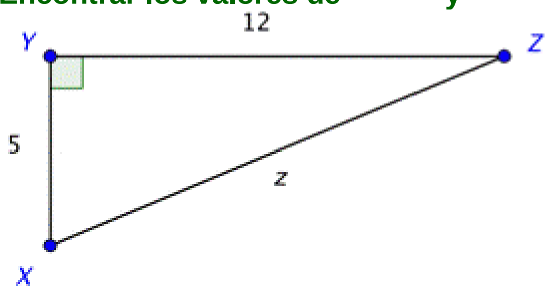
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 4^2 + 11^2$$
$$c^2 = 137$$
$$c = \sqrt{137}$$

C = 11,7

Ejemplo

Problema

Encontrar los valores de $\tan X$ **y** $\sec X$ **.**



$$\tan X = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{12}{5}$$

Puedes inmediatamente calcular la tangente a partir de su definición y de la información en el diagrama.

$$5^2 + 12^2 = z^2$$
$$25 + 144 = z^2$$
$$169 = z^2$$
$$13 = z$$

Para encontrar el valor de la secante, necesitarás la longitud de la hipotenusa. Usa el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de la hipotenusa.

$$\sec X = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{z}{5} = \frac{13}{5}$$

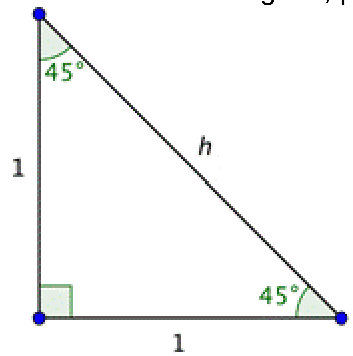
Ahora calcula sec *X* usando la definición de secante.

Respuesta $\tan X = \frac{12}{5}$, $\sec X = \frac{13}{5}$

B. Razones trigonométricas de ángulos notables.

Como regla general, necesitas usar la calculadora para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier medida particular. Sin embargo, ángulo que miden 30°, 45°, y 60° — que encontrarás en muchos problemas y aplicaciones — son especiales. Puedes encontrar los valores exactos de estas funciones sin una calculadora. Veamos cómo:

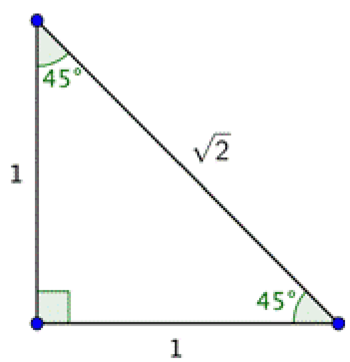
Supongamos que tienes un triángulo rectángulo con un ángulo agudo que mide 45°. Como los ángulos agudos son complementarios, el otro ángulo también debe medir 45°. Ya que los dos ángulos agudos son iguales, los catetos también deben tener la misma longitud, por ejemplo, 1 unidad.



Puedes determinar la hipotenusa usando el Teorema de Pitágoras.

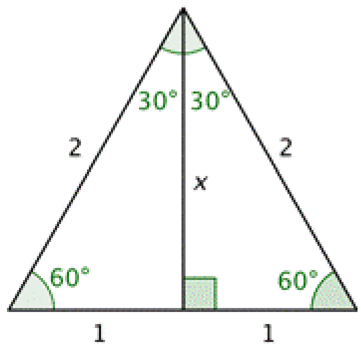
$$1^2 + 1^2 = h^2$$
$$1 + 1 = h^2$$
$$2 = h^2$$
$$\sqrt{2} = h$$

Ahora tienes todos los lados y ángulos en el triángulo rectángulo.



$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45° = 1$$
$$\csc 45° = \sec 45° = \sqrt{2}, \quad \cot 45° = 1$$

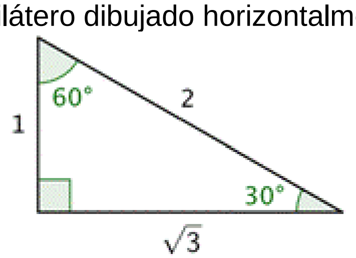
Puedes construir otro triángulo que puedes usar para encontrar todas las funciones trigonométricas para 30° y 60°. Comienza con un triángulo equilátero con los lados iguales midiendo 2 unidades. Si divides el triángulo equilátero a la mitad, produces dos triángulos de con ángulos de 30°, 60° y 90°. Estos dos triángulos rectángulos son congruentes. Ambos tienen una hipotenusa de longitud 2 y una base de longitud 1.



Puedes determinar la altura usando el Teorema de Pitágoras.

$$x^2 + 1^2 = 2^2$$
$$x^2 + 1 = 4$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3}$$

Aquí vemos la mitad del triángulo equilátero dibujado horizontalmente.



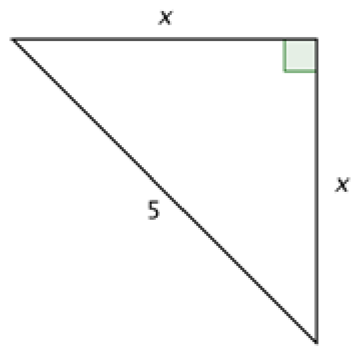
Puedes usar este triángulo (que a veces se llama triángulo 30° - 60° - 90°) para encontrar todas las funciones trigonométricas para 30° y 60°. Observa que la hipotenusa es dos veces el cateto más corto que es opuesto al ángulo de 30°, de manera que $\sin 30° = \frac{1}{2}$. La longitud de cateto más largo que es opuesto al ángulo de 60° es $\sqrt{3}$ veces la longitud del cateto más corto.

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60° = \sqrt{3}, \quad \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplos.

¿Cuál es el valor de *x* en el triángulo siguiente?



Como ambos catetos miden lo mismo, los dos ángulos agudos deben ser iguales, por lo que miden 45° cada uno.

$$\sqrt{2}\cdot x = 5$$
$$x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

En un triángulo 45° - 45° - 90°, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud de un cateto. Puedes usar ésta relación para encontrar *x.* Recuerda racionalizar el denominador.

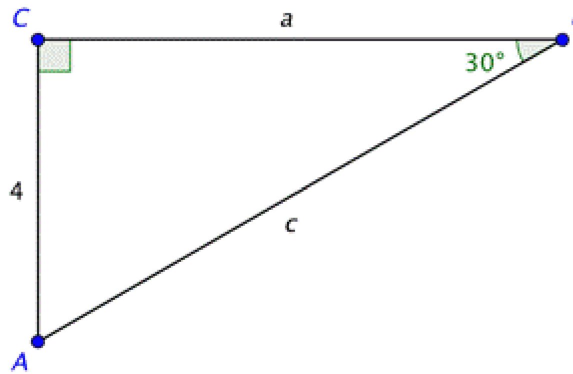
$$\sin 45° = \frac{x}{5}$$
$$5\cdot\sin 45° = x$$
$$5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = x$$
$$\frac{5}{\sqrt{2}} = x$$
$$x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Aquí vemos otra manera de resolver el problema. Puedes usar la definición de seno para encontrar *x*.

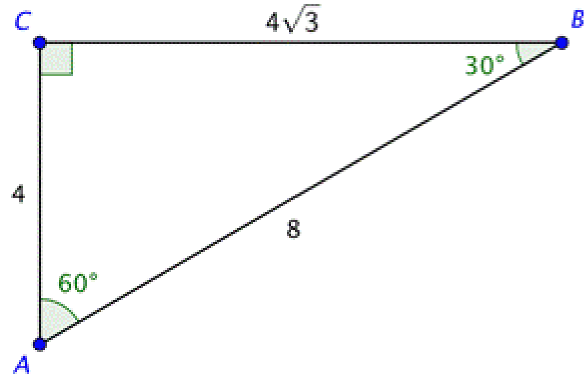
Respuesta

$$x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

También pudiste haber usado el Teorema de Pitágoras para resolver el problema anterior, el cual habría producido la ecuación $x^2 + x^2 = 5^2$.

Ejemplo	
Problema	**Resolver el triángulo rectángulo mostrado a continuación.**
 	Los ángulos agudos son complementarios, entonces $m\angle A = 60°$. Este es un triángulo 30°- 60°- 90° . Ahora podemos usar las funciones trigonométricas para encontrar las longitudes de los lados faltantes.
$\sin 30° = \frac{4}{c}$ $\frac{1}{2} = \frac{4}{c}$ $c = 8$	Como conocemos todas las medidas de los ángulos, ahora necesitamos encontrar las longitudes de los lados faltantes. Para encontrar *c* (la longitud de la hipotenusa), podemos usar la función seno porque sabemos que $\sin 30° = \frac{1}{2}$ y conocemos la longitud del lado opuesto.
$\tan 60° = \frac{a}{4}$ $\sqrt{3} = \frac{a}{4}$ $4\sqrt{3} = a$	Para encontrar *a* (la longitud del lado opuesto al ángulo *A*), podemos usar la función de la tangente porque conocemos $\tan 60° = \sqrt{3}$ y la longitud del lado adyacente.

Respuesta



Ahora conocemos todos los lados y todos los ángulos. Sus valores se muestran en el dibujo.

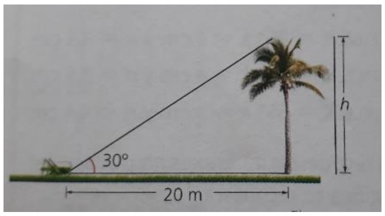
C. Resolución de triángulos rectángulos. Ángulos de elevación y ángulo de depresión. Aplicaciones a triángulos rectángulos.

Hay muchas maneras de encontrar los lados y los ángulos desconocidos en un triángulo rectángulo. Resolver el triángulo rectángulo puede lograrse usando las definiciones de las funciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras. A este proceso se le llama resolver el triángulo rectángulo. Ser capaz de resolver un triángulo rectángulo es útil para resolver una variedad de problemas reales como la construcción de una rampa para sillas de ruedas.

En la siguiente imagen podemos apreciar **en qué consisten los ángulos de elevación y depresión**:

Ejemplo:

Un saltamontes se encuentra a 20 m de pie de una palmera y observa la copa con un ángulo de elevación de 30° (figura). Para calcular la altura de la palmera, se puede utilizar la relación:

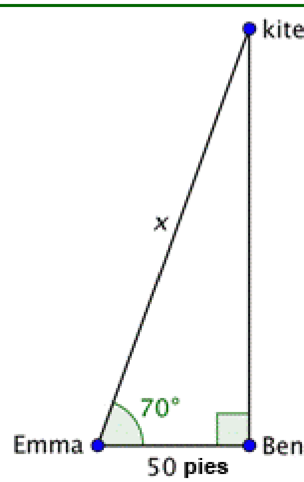


$$sen\ 30° = \frac{h}{20}$$

h = 20 x sen 30°

h = 20X0,5

h = 10 m

Ejemplo	
Problema	**Ben y Emma salieron a volar una cometa. Emma puede ver que la cuerda de su cometa forma un ángulo de 70° con respecto a la tierra. La cometa está directamente sobre Ben, que está parado a 50 pies de distancia. ¿cuántos pies de cuerda ha soltado Emma? Redondear al pie más cercano.**
	Queremos encontrar la longitud de la cuerda que ha soltado. Es la hipotenusa del triángulo rectángulo mostrado.
$\cos 70° = \dfrac{50}{x}$	Como la distancia de 50 pies corresponde al lado adyacente al ángulo de

70°, puedes usar la función coseno para encontrar *x*.

$$x \cdot \cos 70° = 50$$
$$x = \frac{50}{\cos 70°}$$
$$x = \frac{50}{0.342\ldots}$$
$$x = 146.19\ldots$$

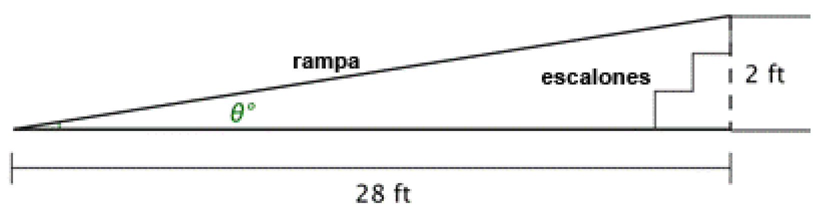
Resuelve la ecuación para *x*. Usa una calculadora para encontrar el valor numérico. La respuesta se redondea a 146.

Respuesta Emma ha soltado aproximadamente 146 pies de cuerda.

En el ejemplo anterior, le dieron un lado y un ángulo agudo. En el siguiente, te dan dos lados y te piden encontrar un ángulo. Encontrar un ángulo normalmente consiste en usar las funciones trigonométricas inversas. La letra Griega teta, *θ*, se usa comúnmente para representar un ángulo desconocido. En este ejemplo, *θ* representa el ángulo de elevación.

Ejemplo

Problema **Una rampa para sillas de ruedas se coloca sobre unas escaleras de manera que un extremo queda a 2 pies sobre el suelo. El otro extremo está en cierto punto y la distancia horizontal es de 28 pies, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es el ángulo de elevación redondeado a la decena de grado más cercana?**



[el dibujo no está a escala]

El ángulo de elevación está marcado como $\theta°$ en el diagrama. Las longitudes dadas son los lados opuesto y adyacente a dicho ángulo, entonces puedes usar la función tangente para encontrar θ.

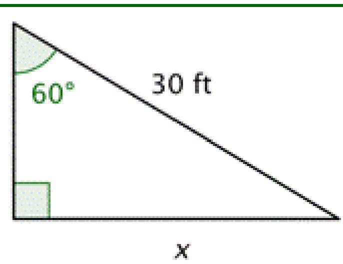
$$\tan\theta^{\circ} = \frac{2}{28}$$
$$\tan\theta^{\circ} = \frac{1}{14}$$
$$\theta^{\circ} = \tan^{-1}\frac{1}{14}$$
$$\theta = 4.0856\ldots$$

Quieres encontrar la medida de un ángulo que te da cierto valor de tangente. Esto significa que necesitas encontrar la inversa de la tangente. Recuerda que debes usar las teclas SHIFT y TAN (1/4) en tu calculadora. Observa el lugar de las centenas para redondear a la decena más cercana.

Respuesta El ángulo de elevación es de aproximadamente 4.1°.

Recuerda que los problemas que involucran triángulos con ciertos ángulos especiales pueden resolverse sin calculadora.

Ejemplo	
Problema	**Se usa una cerca para formar un corral triangular con el lado más largo de 30 pies, como se muestra abajo. ¿Cuál es la medida exacta del lado opuesto al ángulo de 60°?**



Llamemos *x* a la longitud desconocida. Como conoces la longitud de la hipotenusa, puedes usar la función seno.

$$\sin 60^{\circ} = \frac{x}{30}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{30}$$

Este es un triángulo 30°- 60°- 90°. Entonces, puedes calcular el valor exacto del a función trigonométrica sin usar una calculadora.

Resuelve la ecuación para *x*.

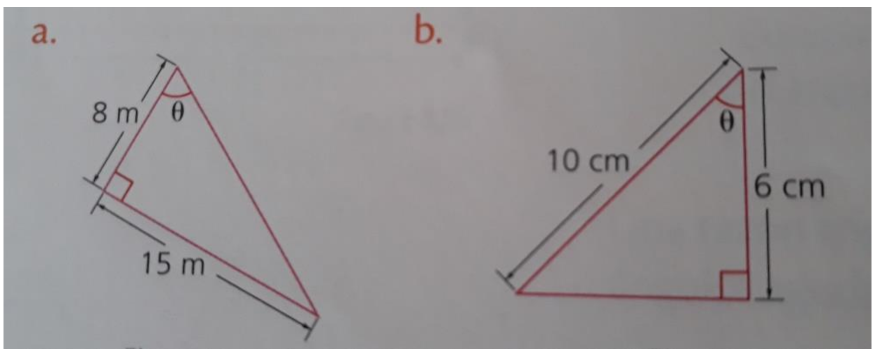
$$x = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

Respuesta La longitud exacta del lado opuesto al ángulo de 60°es $15\sqrt{3}$ pies.

TALLER N°1: Razones trigonométricas En un triángulo rectángulo

Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

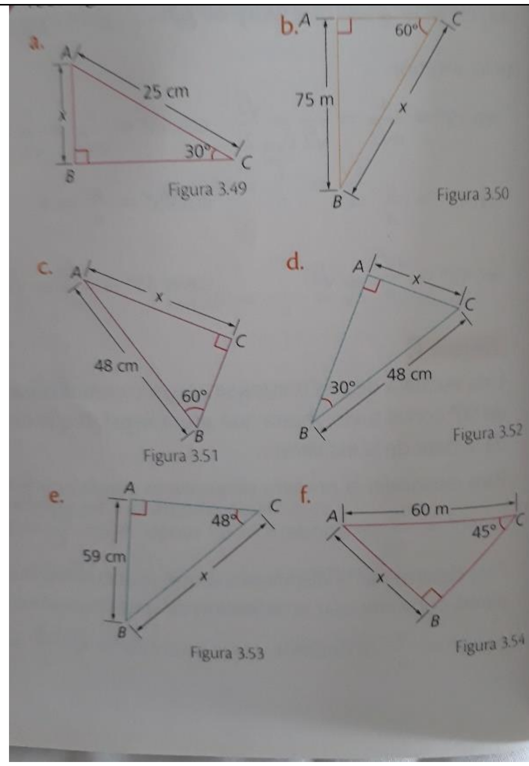
1. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos ABC tales que:
   a. A = 90°, b= 10 cm y c = 12 cm
   b. B = 90°, b= 15 cm y c = 12 cm
2. Halla las razones trigonométricas del ángulo θ en cada triángulo rectángulo.



3. Encuentra en cada caso, todas las razones trigonométricas del ángulo β
   a. si $\tan\beta = \frac{7}{9}$
   b. Si $\sec\beta = \frac{13}{5}$
4. Hallar las razones trigonométricas de un ángulo de 30° y de otro de 60°.
5. Utiliza la calculadora para determinar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.
   a. sen 36° b. cos 24° c. tan 31° d. csc 27° e. sec 26° 33´ f. tan 23° 23´23”

TALLER N°2: Razones trigonométricas de ángulos notables

Encuentra la medida desconocida en los triángulos rectángulos.



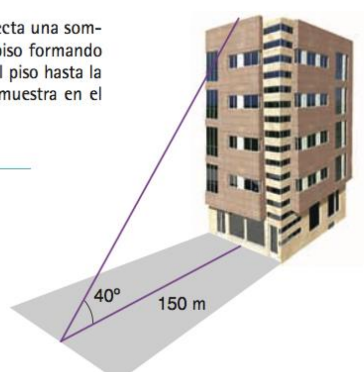
TALLER N°3: Aplicaciones a triángulos rectángulos.

Resolución de triángulos rectángulos. Ángulos de elevación y ángulo de depresión. Aplicaciones a triángulos rectángulos.

1.

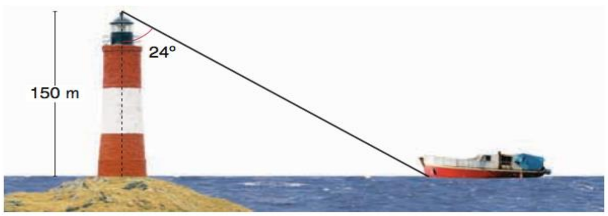
A cierta hora del día un edificio proyecta una sombra de 150 m sobre un punto en el piso formando un ángulo de 40° desde el punto en el piso hasta la parte más alta del edificio, como se muestra en el dibujo.

¿Qué altura tiene el edificio? ____________



2.

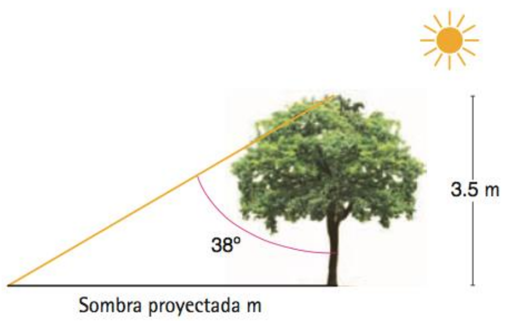
Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar, se observa un barco bajo un ángulo de 24°, como se muestra en el dibujo.



¿A qué distancia se encuentra el barco del faro? ___________

3.

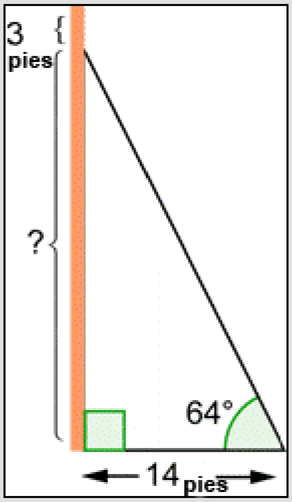
La inclinación de los rayos solares en cierto momento es de 38°. Si un árbol tiene 3.5 m de altura como en el dibujo:



¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por el árbol? ___________

4.

Una persona está sujeta a un poste telefónico a 3 pies debajo del extremo superior del poste, como se muestra abajo. La persona está enganchada a 14 pies del poste y forma un ángulo de 64° con el suelo. ¿Cuál es la altura a la que está la persona sujeta? Redondea la respuesta a la decena de pie más cercana.



A) $14 \cdot \sin 64° \approx 12.6$ pies

B) $14 \cdot \tan 64° \approx 28.7$ pies

C) $14 \cdot \tan 64° + 3 \approx 31.7$ pies

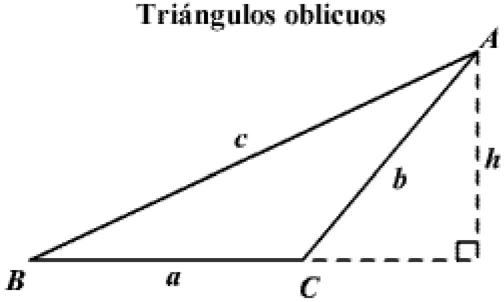
D) $\dfrac{14}{\cos 64°} \approx 31.9$ pies

LEY DEL SENO

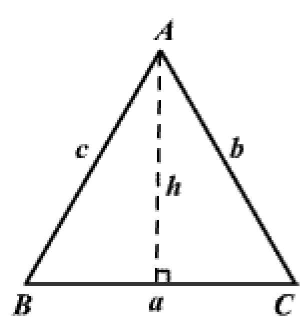
La **ley de los senos** es la relación entre los lados y ángulos de triángulos no rectángulos (oblicuos). Simplemente, establece que la relación de la longitud de un lado de un triángulo al seno del ángulo opuesto a ese lado es igual para todos los lados y ángulos en un triángulo dado.

En ΔABC es un triángulo oblicuo con lados *a, b* y *c*, entonces $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Triángulos oblicuos



C es obtuso

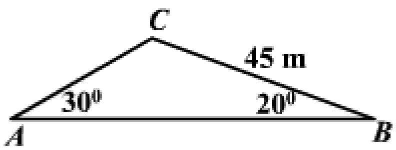


C es agudo

Para usar la ley de los senos necesita conocer ya sea dos ángulos y un lado del triángulo (AAL o ALA) o dos lados y un ángulo opuesto de uno de ellos (LLA). Dese cuenta que para el primero de los dos casos usamos las mismas partes que utilizó para probar la congruencia de triángulos en geometría, pero en el segundo caso no podríamos probar los triángulos congruentes dadas esas partes. Esto es porque las partes faltantes podrían ser de diferentes tamaños. Esto es llamado el caso ambiguo y lo discutiremos más adelante.

Ejemplo 1: Dado dos ángulos y un lado no incluido (AAL).

Dado ΔABC con $A = 30°$, $B = 20°$ y $a = 45$ m. Encuentre el ángulo y los lados faltantes.



El tercer ángulo del triángulo es

$C = 180° - A - B = 180° - 30° - 20° = 130°$

Por la ley de los senos,

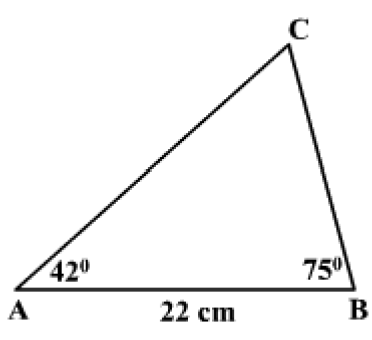
$$\frac{45}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 20°} = \frac{c}{\sin 130°}$$

Por las propiedades de las proporciones

$$b = \frac{45 \sin 20°}{\sin 30°} \approx 30.78\text{m} \quad \text{y} \quad c = \frac{45 \sin 130°}{\sin 30°} \approx 68.94\text{m}$$

Ejemplo 2: Dado dos ángulos y un lado incluido (ALA).

Dado $A = 42°$, $B = 75°$ y $c = 22$ cm. Encuentre el ángulo y los lados faltantes.



El tercer ángulo del triángulo es:

$C = 180° – A – B = 180° – 42° – 75° = 63°$

Por la ley de los senos,

$$\frac{a}{\sin 42°} = \frac{b}{\sin 75°} = \frac{22}{\sin 63°}$$

Por las propiedades de las proporciones

$$a = \frac{22 \sin 42°}{\sin 63°} \approx 16.52\,\text{cm} \quad \text{y} \quad b = \frac{22 \sin 75°}{\sin 63°} \approx 23.85\,\text{cm}$$

Para una mejor comprensión de la ley del seno, observa los siguientes videos:

https://www.youtube.com/watch?v=e2_WDo5yK_Q&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-

Ejemplo 1:

https://www.youtube.com/watch?v=nCK3jKq_Iyk&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=2

Ejemplo 2:

https://www.youtube.com/watch?v=5l-elvt30D0&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=3

Ejemplo 3:

https://www.youtube.com/watch?v=blOkYHt7fJE&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=4

LEY DEL COSENO

La **ley de los cosenos** es usada para encontrar las partes faltantes de un triángulo oblicuo (no rectángulo) cuando ya sea las medidas de dos lados y la medida del ángulo incluido son conocidas (LAL) o las longitudes de los tres lados (LLL) son conocidas. En cualquiera de estos casos, es imposible usar la ley de los senos porque no podemos establecer una proporción que pueda resolverse.

La ley de los cosenos establece:

$c^2 = a^2 + b^2 – 2ab \cos C.$

Esto se parece al teorema de Pitágoras excepto que para el tercer término y si *C* es un ángulo recto el tercer término es igual 0 porque el coseno de 90° es 0 y se obtiene el teorema de Pitágoras. Así, el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

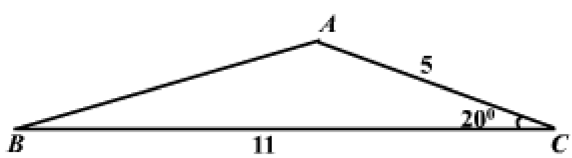
La ley de los cosenos también puede establecerse como

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$

Ejemplo 1: Dos lados y el ángulo incluido-LAL

Dado $a = 11$, $b = 5$ y $C = 20°$. Encuentre el lado y ángulos faltantes.



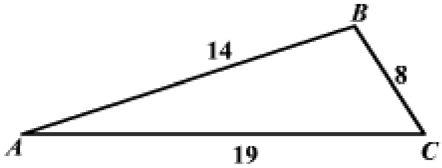
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$
$$= \sqrt{11^2 + 5^2 - 2(11)(5)(\cos 20°)} \approx 6.53$$

Para encontrar los ángulos faltantes, ahora es más fácil usar la ley de los senos.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{11}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} \approx \frac{6.53}{\sin 20°}$$
$$\sin A \approx \frac{11 \sin 20°}{6.53} \qquad \sin B \approx \frac{5 \sin 20°}{6.53}$$
$$A \approx 144.82° \qquad B \approx 15.2°$$

Ejemplo 2: Tres lados-LLL

Dado $a = 8$, $b = 19$ y $c = 14$. Encuentre las medidas de los ángulos.



Es mejor encontrar el ángulo opuesto al lado más grande primero. En este caso, ese es el lado *b.*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{19^2 - 8^2 - 14^2}{-2(8)(14)} \approx -0.45089$$

Ya que el cos *B* es negativo, sabemos que *B* es un ángulo obtuso.

$B \approx 116.80°$

Ya que *B* es un ángulo obtuso y un triángulo tiene a lo más un ángulo obtuso, sabemos que el ángulo *A* y el ángulo *C* ambos son agudos.

Para encontrar los otros dos ángulos, es más sencillo usar la ley de los senos.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{8}{\sin A} \approx \frac{19}{\sin 116.80°} \approx \frac{14}{\sin C}$$

$$\sin A \approx \frac{8\sin 116.80°}{19} \qquad \sin C \approx \frac{14\sin 116.80°}{19}$$

$$A \approx 22.08° \qquad C \approx 41.12°$$

Para una mejor comprensión de la ley del coseno, observa los siguientes videos:

https://www.youtube.com/watch?v=65RP6V0hsy4&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=10&t=0s

Ejemplo 1:

https://www.youtube.com/watch?v=x4sCCs5q8aA&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=11&t=0s

Ejemplo 2:

https://www.youtube.com/watch?v=cCeJffSwHvc

¿CÓMO SABER CUÁNDO SE USA LA LEY DEL SENO O DEL COSENO?

Observa el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=uEGkKnn2jCI

TALLER N°4: LEY DEL SENO

1. **Resuelve los siguientes puntos del libro "Los Caminos del saber" Matemáticas 10°. Santillana, que se encuentra en el siguiente link, en la página 134.**
   file:///C:/Users/pc/Desktop/los-caminos-del-saber-matematicas-10.pdf

Escribe V, si la proposición es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

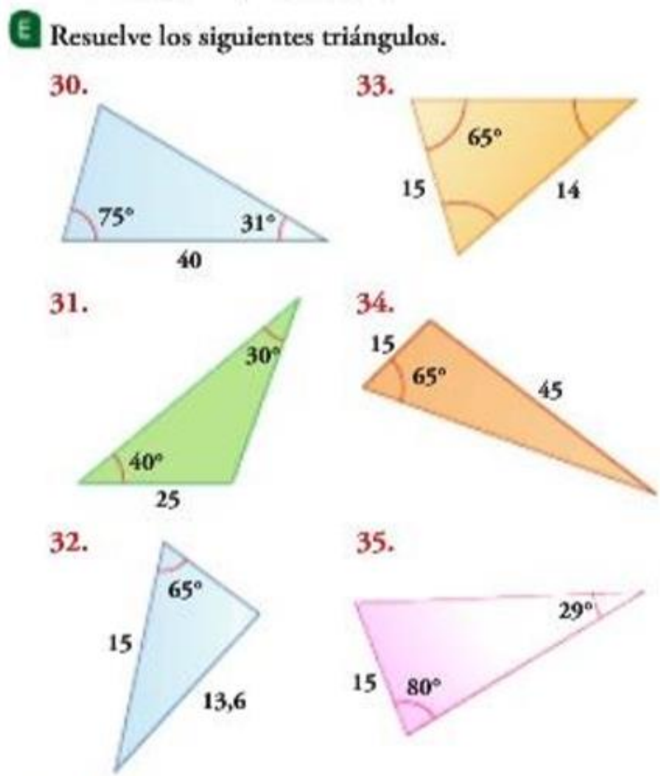
26. La ley de senos solo se puede aplicar en triángulos no rectángulos. ( )

27. Si los lados de un triángulo son a, b y c y los ángulos opuestos son α, β y γ, respectivamente, entonces se cumple que $a \cdot \text{sen}\ \alpha = b \cdot \text{sen}\ \beta$. ( )

28. La razón trigonométrica seno, en un triángulo rectángulo, es un caso particular de la ley de senos. ( )

29. Si los ángulos α y β de un triángulo son complementarios, y a, b son los lados opuestos respectivamente, entonces se cumple que:
$b \cdot \cos \beta = a \cdot \text{sen}\ \beta$. ( )

2.



El siguiente punto lo encontrarás en el link https://es.calameo.com/read/00331129919fbd6a078c5
Allí podrás profundizar en el tema.

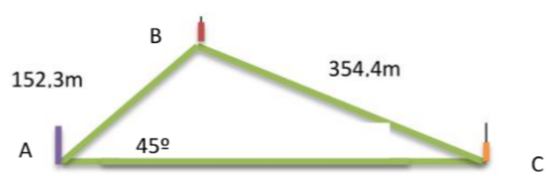
TALLER N°5: LEY DEL SENO

Resuelve las siguientes situaciones:

a. Dos faros A y B, distan uno del otro 40 Km. Un buque esta situado a 11 Km del faro B. ¿A que distancia se encuentra el buque del faro A, si el ángulo formado por la dirección de los dos faros y la dirección del faro A al bote es de 13,2º?

b. Un poste proyecta una sombra de 4 metros cuando el sol se encuentra a 61º por encima de la horizontal. El poste forma un ángulo de 9º con la vertical y está inclinado en la dirección del sol. Encuentre la longitud de este poste.

c. Sobre un terreno un tipógrafo toma las medidas del terreno. Como halló la medida que hay del punto A a C?



TALLER N°6: LEY DEL COSENO, PROBLEMAS

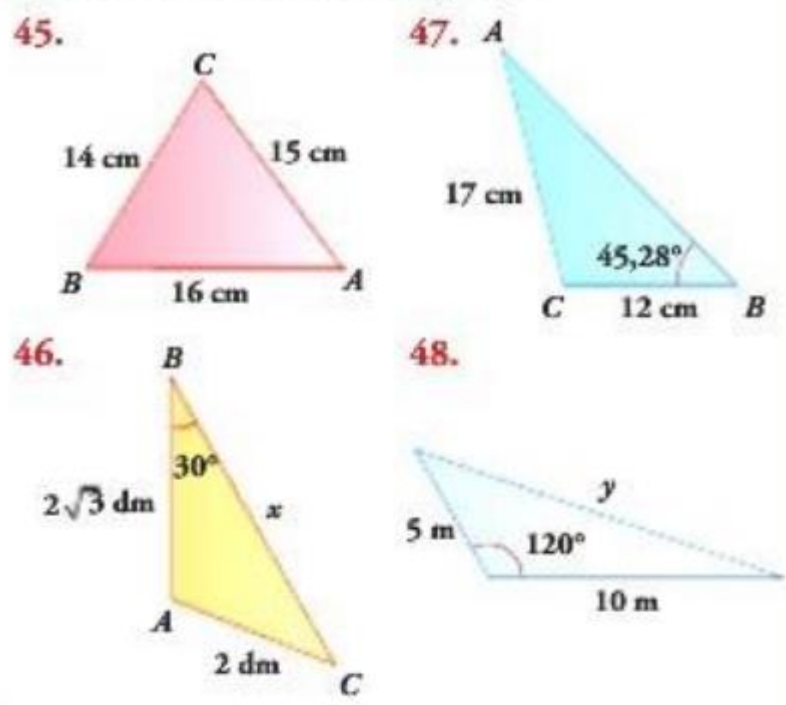
1. **Resuelve los siguientes puntos del libro "Los Caminos del saber" Matemáticas 10°. Santillana, que se encuentra en el siguiente link, en la página 138.**
   file:///C:/Users/pc/Desktop/los-caminos-del-saber-matematicas-10.pdf

Responde.

42. ¿Por qué se necesita la ley del coseno para resolver triángulos? Explica los casos.
43. ¿Cómo se aplica la ley del coseno en un triángulo rectángulo?
44. ¿Qué propiedad se aplica en la demostración de la ley del coseno cuando el ángulo es mayor de 90°?

2.

Resuelve los siguientes triángulos.



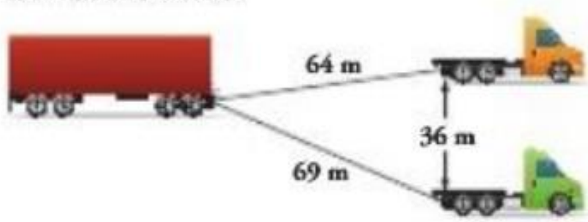
TALLER N°7: LEY DEL COSENO, PROBLEMAS

Lee y resuelve.

53. En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman las vigas entre sí.

54. Tres pueblos *A*, *B* y *C* están unidos por carreteras rectas y planas. Las distancias entre *A* y *B* es de 6 km, entre *B* y *C* es de 9 km. El ángulo formado por ambas carreteras es 120°. ¿Cuál es la distancia entre *A* y *C*?

55. Dos remolques que están separados por 36 metros tiran de un contenedor, como se muestra en la figura. Si la longitud de uno de los cables es 64 m y la del otro es de 69 m, determina el ángulo que forman entre ellos.



Recursos didácticos: ¿Qué usar?

1. **Videos.**

   https://www.youtube.com/watch?v=FUMlQtJfrHo&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1
   https://www.youtube.com/watch?v=e2_WDo5yK_Q&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-
   https://www.youtube.com/watch?v=nCK3jKq_Iyk&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=2
   https://www.youtube.com/watch?v=5l-elvt30D0&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=3
   https://www.youtube.com/watch?v=blOkYHt7fJE&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=4

https://www.youtube.com/watch?v=65RP6V0hsy4&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=10&t=0s
https://www.youtube.com/watch?v=x4sCCs5q8aA&list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX-&index=11&t=0s
https://www.youtube.com/watch?v=cCeJffSwHvc
https://www.youtube.com/watch?v=uEGkKnn2jCI

2. **Libros digitales:**

file:///C:/Users/pc/Desktop/los-caminos-del-saber-matematicas-10.pdf

3. **Guías digitales**

https://es.calameo.com/read/00331129919fbd6a078c5

TEMPORALIZACIÓN:

1º semana:

- ✓ Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

2º semana:

- ✓ Razones trigonométricas de ángulos notables.

3º semana:

- ✓ Resolución de triángulos rectángulos.

4º semana:

- ✓ Ángulos de elevación y ángulo de depresión.

5º semana:

- ✓ Aplicaciones a triángulos rectángulos.

6º semana:

- ✓ Ley del seno y del coseno.
- ✓ Actividades.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

- ✓ Usar las razones trigonométricas y sus transformaciones en la resolución de triángulos rectángulos y problemas geométricos diversos.
- ✓ Resolver problemas de la vida cotidiana mediante el uso de los teoremas del seno y del coseno.

- ✓ Obtener todas las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera relacionándolo con otro ángulo del primer cuadrante.