GUIA DIDACTICA PERIODO N°:3	GRUPO(S): 8° 1,3,4	Nº COPIAS:
MATERIA DE PROMOCION: MATEMATICAS		
NOMBRE DEL DOCENTE: JOSE MANUEL BERRIO		SECCION: YERMO
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:		**GRUPO: 8°** 1,3 y4 ___

I.E. YERMO Y PARRES
GUIA DIDACTICA DE MATEMATICAS
GRADOS 8° - TERCER PERIODO
DOCENTE: JOSE MANUEL BERRIO

Situando las matemáticas como eje principal en la solución de problemas cotidianos, le daremos un significado diferente a los contenidos a desarrollar en este TERCER PERIODO teniendo en cuenta la situación actual que vive la humanidad y buscando que se lleve al estudiante a asociar la matemática con la tecnología para que aproveche todos los recursos en su beneficio para su propio aprendizaje.

Los temas a desarrollar en este periodo están relacionados con Los casos de factorización y los cocientes notables, en el ámbito algebraico y en el campo de la geometría trabajaremos, los poliedros y cuerpos redondos conlos cuales espero se conlleve al estudiante a la solución de problemas guiados con la utilización de herramientas tecnológicas y el aprovechamiento de la informática.

Esta guía didáctica será desarrollada paso a paso en cada una de las clases programadas y los estudiantes que tienen alguna limitante o incapacidad médica para estar en la presencialidad, la trabajaran desde casa de acuerdo con las orientaciones dadas por los coordinadores y por el concejo académico de la institución.

Se espera el compromiso directo de los estudiantes y padres de familia para acompañar a sus hijos en su aprendizaje para que este sea efectivo y responsable creando entre todos valores de responsabilidad, honestidad y compromiso con su propia formación.

8 Factorización de polinomios

Saberes previos

¿Cuál es el m.c.d. de 12, 18 y 20? Encuéntralo y describe el procedimiento que seguiste.

Analiza

Identifica el factor común de este polinomio:

$3x^3 + 12x^2 + 6x$.

Conoce

Cuando una operación algebraica se expresa como un producto de factores, se dice que está factorizada. En ese caso, ambas expresiones son equivalentes.

Por ejemplo, para factorizar la expresión $3x^3 + 12x^2 + 6x$, se busca un factor común que tengan todos los términos.

Para determinar el factor común del polinomio dado, se puede seguir este proceso:

- Determinar el factor común de los coeficientes del polinomio. $\quad \mathbf{3}x^3 + \mathbf{12}x^2 + \mathbf{6}x$ m.c.d. $(3, 12, 6) = 3$
- Hallar el máximo común divisor de la parte literal del polinomio. $\quad 3\boldsymbol{x^3} + 12\boldsymbol{x^2} + 6\boldsymbol{x}$ m.c.d. $(x^3, x^2, x) = x$

De lo anterior se deduce que el factor común del polinomio es $3x$.

Para calcular el **factor común de un polinomio**, se halla el máximo común divisor de los coeficientes y se multiplica por el máximo común divisor de la parte literal.

8.1 Factorización de un polinomio por factor común

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como un **producto de expresiones algebraicas de menor grado**.

Cuando un polinomio no se puede expresar como producto de otros de menor grado, se dice que es un polinomio irreducible.

Ejemplo 1

Al multiplicar $2x$ por $x^2 + 3xy$ se obtiene $2x^3 + 6x^2y$.

Es decir, $2x(x^2 + 3xy) = 2x^3 + 6x^2y$.

$2x \cdot (x^2 + 3xy)$ es una expresión factorizada de $2x^3 + 6x^2y$.

$2x$ y $x^2 + 3xy$ son factores de $2x^3 + 6x^2y$.

Muchos polinomios se pueden factorizar identificando el factor común de sus términos.

Ejemplo 2

Observa cómo factorizar los siguientes polinomios:

a. $14x^4y + 7xy^2 + 21xy$ $\qquad$ **b.** $24x^2 + 12xy$

Al identificar el factor común de los términos de cada polinomio, estos quedan expresados así:

a. $7xy\,(2x^3 + y + 3)$ $\qquad$ **b.** $12x\,(2x + y)$

8.2 Factorización por agrupación de términos

Para **factorizar un polinomio por agrupación de términos**, se aplica la propiedad asociativa de la adición y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. De esta manera, se hallan factores comunes a cada grupo de términos.

Ejemplo 3

Para factorizar el polinomio $5x + 5y + 3x^2 + 3xy$ se siguen estos pasos:

1. Se agrupan los términos que tienen algún factor común.

$$(5x + 5y) + (3x^2 + 3xy)$$

2. Se factoriza cada grupo de términos.

$$5(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + 3x(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

3. Se factoriza la expresión común, es decir $(x + y)$.

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})(5 + 3x)$$

Por lo tanto, $5x + 5y + 3x^2 + 3xy = (x + y)(5 + 3x)$

Ejemplo 4

Factoriza el polinomio $4x^2 - 2xy + 9yz - 18xz$.

La factorización requiere los siguientes pasos.

$(4x^2 - 2xy) + (9yz - 18xz)$ ← Se agrupan los términos con factores comunes.

$2x(2x - y) + 9z(y - 2x)$ ← Se factoriza cada grupo de términos.

$2x(2x - y) - 9z(2x - y)$ ← Se factoriza el signo menos.

$(2x - y)(2x - 9z)$ ← Se factoriza la expresión común $(2x - y)$.

8.3 Factorización de la diferencia de cuadrados perfectos

Si al cuadrado de lado a de la Figura 2.33, se le sustrae una región cuadrada de lado b, se obtiene una región cuya área es $a^2 - b^2$, que también se puede expresar como la suma de las áreas de dos rectángulos:

$$a(a - b) + b(a - b) = (a - b)(a - b)$$

Entonces $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Factorizar una **diferencia de cuadrados** equivale al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de los términos. Es decir: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

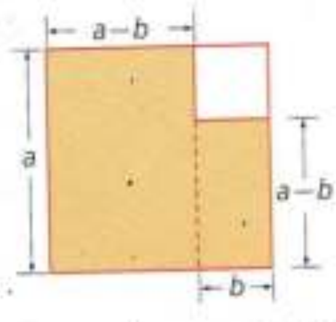

Figura 2.33

Ejemplo 5

Observa cómo se factorizan las siguientes diferencias de cuadrados.

a. $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$, porque $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{4} = 2$.

b. $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$, porque $\sqrt{4x^2} = 4x$ y $\sqrt{9} = 3$.

c. $49n^2 - 1 = (7n + 1)(7n - 1)$, porque $\sqrt{49n^2} = 7n$ y $\sqrt{1} = 1$.

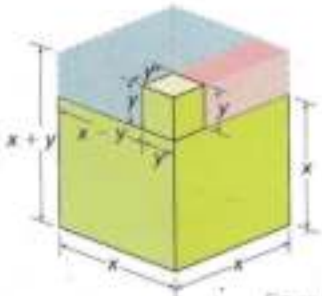

Figura 2.34

8.4 Factorización de la suma de cubos perfectos

La suma de dos cubos perfectos equivale al producto de dos factores: el primero, un binomio formado por las raíces cúbicas de los términos; el segundo, un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz menos el producto de las raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

La **factorización de la suma de cubos perfectos** se expresa así:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Esta igualdad se obtiene al completar la figura en el espacio, de tal manera que las dimensiones del paralelepípedo que se forma son $x + y$, x y x, como en la Figura 2.34.

Ejemplo 6

Para factorizar la suma $x^3 + 27$ se sigue este proceso:

1. Se extrae la raíz cúbica del primer término. — *Para* x^3 es $\sqrt[3]{x^3} = x$
2. Se extrae la raíz cúbica del segundo término. — Para 27 es $\sqrt[3]{27} = 3$
3. Se expresa la suma de cubos como el producto de la suma de las raíces por la suma de los cuadrados de las raíces menos su producto. — $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

8.5 Factorización de la diferencia de cubos perfectos

La diferencia de dos cubos perfectos equivale a multiplicar dos factores: el primero, un binomio formado por la diferencia de las raíces cúbicas de los términos; el segundo, un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz más el producto de las raíces más el cuadrado de la segunda raíz (Figura 2.33).

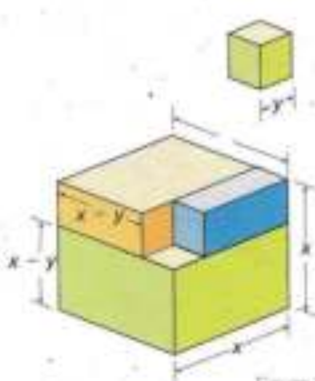

Figura 2.35

Ejemplo 7

Para factorizar la expresión $x^3 - 8$ primero se calcula la raíz cúbica de x^3 que es x y luego, la raíz cúbica de 8 que es 2.

Después, expresa $x^3 - 8$ como el producto de la diferencia de las raíces $(x - 2)$ y la suma de los cuadrados de las raíces más el producto de las mismas, es decir, $(x^2 + 2x + 4)$.

Entonces: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

8.6 Factorización de expresiones de la forma $x^n \pm y^n$

Las **expresiones de la forma $x^n + y^n$**, con n como un número entero, son factorizables solo si n es impar. La factorización de este tipo de expresiones es:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Las **expresiones de la forma $x^n - y^n$**, con n como un número entero, son factorizables para todo n. La factorización de este tipo de expresiones es:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Ejemplo 8

Factoriza la expresión $x^5 + y^5$.

Siguiendo lo descrito anteriormente, se concluye que:

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

Ejemplo 9

El binomio $x^4 - y^4$ es la diferencia de dos potencias de un número par. Entonces, es factorizable; $(x - y)$ y $(x + y)$ son dos de sus factores.

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x - y)(x^{(4-1)} + x^{(4-2)}y^{(4-3)} + x^{(4-3)}y^{(4-2)} + y^{(4-1)}) \\ &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \end{aligned}$$

Al observar las expresiones generales de la factorización de los binomios de las formas $x^n + y^n$ o $x^n - y^n$, y los ejemplos anteriores se concluye que:

- El primer factor tiene el mismo signo del binomio que se quiere factorizar.
- Cuando la operación es una adición, los signos del segundo factor se alternan entre positivo y negativo, empezando por positivo. Si es una sustracción, todos los signos del segundo factor son positivos.
- En el segundo factor, los exponentes del primer término van disminuyendo, mientras que los del segundo término van aumentando.

8.7 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Un **trinomio cuadrado perfecto** se factoriza como un binomio al cuadrado, así:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \qquad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ejemplo 10

Al calcular la longitud de los lados de un cuadrado de área es $a^2 + 14a + 49$:

1. Se hallan las raíces de los cuadrados perfectos a^2 y 49. Esas raíces son a y 7, respectivamente. $\sqrt{a^2} = a ; \sqrt{49} = 7$

2. Se verifica que el doble producto de esas raíces es $14a$, que es el segundo término del polinomio. $2\,(a \cdot 7) = 14a$

3. Se factoriza la expresión y se obtiene $(a + 7)^2$. $a^2 + 14a + 7 = (a^2 + 7)^2$

Por lo tanto, la longitud de cada lado del cuadrado es $(a + 7)$.

8.8 Factorización de trinomios cuadrados perfectos por adición y sustracción

Los **trinomios de la forma $a^2 \pm mab + b^2$**, con m distinto de 2, satisfacen parcialmente las características de los trinomios cuadrados perfectos. El primer y tercer términos son cuadrados perfectos, pero el segundo término no es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Para factorizar esos trinomios, se adiciona y se sustrae al trinomio dado un término de la forma nab, de manera que $mab + nab = \pm 2ab$. Si el trinomio original es factorizable, se obtiene la diferencia entre un trinomio cuadrado perfecto y un cuadrado perfecto, lo que finalmente es factorizado como diferencia de cuadrados.

Ejemplo 11

Para que el trinomio $9x^4 - 15x^2 + 1$ sea cuadrado perfecto, el segundo término debe ser $-6x^2$.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = 9x^4 - 15x^2 + 1 + (9x^2 - 9x^2)$ Se adiciona y sustrae $9x^2$.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = (9x^4 - 15x^2 + 1 + 9x^2) - 9x^2$ Se aplica la propiedad asociativa de la adición.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = (9x^4 - 6x^2 + 1) - 9x^2$ Se reducen términos semejantes.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = (3x^2 - 1)^2 - 9x^2$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto como un binomio al cuadrado.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = [(3x^2 - 1) + 3x][(3x^2 - 1) - 3x]$ Se factoriza la diferencia de cuadrados.

8.9 Factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ se sigue este procedimiento:

1. Se multiplica y se divide el polinomio por el coeficiente del primer término. $\frac{a}{a}(ax^{2n} + bx^n + c) = \frac{a^2x^{2n} + a(bx^n) + ac}{a}$

2. Se expresa el numerador como un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$. $\frac{(ax^n)^2 + b(ax^n) + ac}{a}$

3. Se factoriza la expresión del numerador como $(ax + p)(ax + q)$, donde $p + q = b$ y $pq = ac$. $\frac{(ax^n + p)(ax^n + q)}{a}$

4. Cuando sea posible, se simplifica a.

Para el caso en el cual $a = 1$, el trinomio es de la forma $x^2 + bx + c$ y se factoriza de la misma manera.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 12

Para factorizar el polinomio $5x^2 + 6x + 1$ se puede proceder así:

a. Se multiplica el polinomio por $\frac{5}{5}$. $\quad \frac{5^2x^2 + 5(6x) + 5}{5}$

b. Se expresa el numerador de la forma $y^2 + by + d$. $\quad \frac{(5x)^2 + 6(5x) + 5}{5}$

c. Se buscan p y q, tales que $pq = 5$ y $p + q = 6$. $\quad p = 5$ y $q = 1$

d. Se expresa el trinomio factorizado. $\quad \frac{(5x + 5)(5x + 1)}{5}$

e. Si es posible, se saca factor común. $\quad \frac{5(x + 1)(5x + 1)}{5}$

f. Se simplifica y se expresa el polinomio factorizado. $\quad (x + 1)(5x + 1)$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Factoriza las expresiones hallando el factor común.

a. $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2 =$ ____________

b. $8x^4 - 4x^3 + 6x^2 =$ ____________

c. $2x^3 - 4x^4 + 2x^2 =$ ____________

d. $5x^7 - 6x^6 + 3x^5 =$ ____________

e. $5xy + 3x^2 - 2xy^2 =$ ____________

f. $-15x^2ac^3 + 5xa^2c^2 =$ ____________

g. $27a^3b^2c + 9ab^3c^2 =$ ____________

h. $ax + x - 2a^2x^3 =$ ____________

i. $abc + abc^2 =$ ____________

j. $18ax + 9ay + 3a =$ ____________

Razonamiento

2 Encuentra los términos que faltan en la factorización de cada polinomio.

a. $4m^3n - 2mn + 6m = \square(2m^2n - n + \square)$

b. $3x^2y + 6x^2y^2 + 9x^2 = \square(y + \square + \square)$

c. $4a^2 + \square + 20a^2b^2 = 4a(\square + 2b + \square)$

d. $3mn^2 + 5m^2n^2 + 10m^3n^2 = \square(3 + \square + 10m^2)$

e. $\square - 36ab + 6a = 2a(ab^2 - \square + \square)$

f. $14a^2x^2 - 7ax^3 + \square = 7ax^2(\square - \square + 4a)$

g. $4m^3 - 8m + 2 = \square(2m^2 - \square + \square)$

h. $24a^2b^2 - 36ab + \square = 6a(\square - 6b + 1)$

Ejercitación

3 Factoriza por agrupación de términos.

a. $ac - ad + bc - bd$

b. $3ax - ay + 9bx - 3by$

c. $18mx - 6my + 54nx - 18ny$

d. $4ax + ay + 12x^2 + 3xy$

e. $3xy - 3xz + 3x - y + z - 1$

4 Une con una línea cada polinomio con su respectiva factorización.

a. $xy - 4x + y - 4$	$(a + 1)(x - 2y)$
b. $a(n + 2) + (n + 2)$	$(x + 1)(y - 4)$
c. $-5x(a + c) + 2y(a + c)$	$(2 - 3z)(3x - 2y)$
d. $6x - 4y + 6yz - 9xz$	$(n + 2)(a + 1)$
e. $x(a + 1) - 2y(a + 1)$	$(a + c)(2y - 5x)$

Razonamiento

5 Factoriza el área de cada rectángulo y encuentra los polinomios que representan la medida de sus lados.

a.

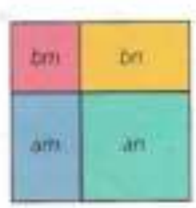

Figura 2.36

b.

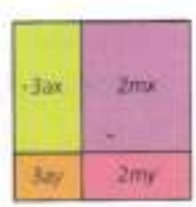

Figura 2.37

8 Factorización de polinomios

Pensamiento variacional

Ejercitación

6 Completa la factorización de cada diferencia de cuadrados.

a. $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$

b. $a^2 - 144 = (a + \square)(a - \square)$

c. $n^2 - 49 = (n + \square)(n - \square)$

d. $4a^2 - 100 = (2a + \square)(2a - \square)$

e. $9x^2 - 16 = (3x + \square)(3x - \square)$

f. $4m^2 - 81 = (2m + \square)(2m - \square)$

7 Factoriza las diferencias de cuadrados.

a. $16x^2 - 9y^2$ b. $144a^2 - 100b^2$

c. $400n^2 - 169m^2$ d. $144 - 9a^2$

e. $121 - x^4$ f. $4a^2b^4 - 121$

g. $25a^{12} - 100a^6b^{10}$ h. $9a^2 - 4x^2y^2z^4$

i. $225p^4 - 49a^4y^6z^8$ j. $144a^2m^6n^4 - 121x^{10}$

k. $100m^2 - 81a^2b^4$ l. $144a^2m^8n^4 - 4x^2y^2z^4$

Razonamiento

8 Escribe el signo = o ≠ según corresponda.

a. $36m^4n^2 - 81p^8 \bigcirc (6m^2n - 9p^4)(6m^2n + 9p^4)$

b. $121x^2 - 100 \bigcirc (11x - 10)(11x + 10)$

c. $49z^2 - 400j^6 \bigcirc (7z - 20j^3)(7z + 20j^3)$

d. $q^2 - r^2 \bigcirc (2q - r)(2q + r)$

e. $a^4b^2 - 16 \bigcirc (a^2b - 4)(a^2b - 4)$

Comunicación

9 Encuentra la expresión factorizada de cada binomio.

a. $x^3 + 216$ b. $a^3 + 8$

c. $n^3 + 512$ d. $y^3 + 343$

e. $m^3 + 1000$ f. $z^3 + 729$

g. $x^3 - 64y^6$ h. $1 - 125a^3y^9$

i. $1728x^6 - 343x^3y^6z^{12}$ j. $8x^{18} - 729y^3z$ 15

k. $27a^{21} - 1000b^3c^{12}$ l. $64m^9 - 216$

m. $(9y^2)^3 - (4z)^3$ n. $n^3 - 343x^3$

Razonamiento

10 Indica para cuáles binomios $2 - x$ es un factor.

a. $8 - x^3$ b. $125 + x^3$

c. $x^3 - 64$ d. $162 - 2x^3$

11 Indica para cuáles binomios $x + 3$ es un factor.

a. $x^2 + 9$ b. $x^4 - 81$

c. $x^3 - 27$ d. $x^5 + 243$

12 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (V). Justifica tus respuestas.

a. $512b^{18} + 1 = (8b^6 + 1)(64b^{12} - 8b^6 + 1)$

b. $512b^{18} - 1 = (8b^6 + 1)(64b^{12} - 8b^6 + 1)$

c. $216 + y^6 = (6 + y^2)(36y - 6y^2 + y^4)$

d. $216 - y^6 = (6 - y^2)(36 + 6y^2 + y^4)$

Ejercitación

13 Factoriza las expresiones dadas.

a. $x^8 - y^4$ b. $x^7 + 128$

c. $a^3 - b^3$ d. $m^5 - n^5$

e. $a^6 + 64q^6$ f. $32 - a^5$

g. $343c^3 - 27z^3$ h. $64 + m^3$

i. $a^6 - 64q^6$ j. $a^2 - b^2$

k. $1 - z^3$ l. $8t^3 + 64$

m. $x^{10} - 1$ n. $x^{15} + y^{15}$

ñ. $16x^4 + 81y^4$ o. $3125 - a^5$

Razonamiento

14 Analiza y escribe si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tus respuestas.

a. La suma de potencias con exponente par siempre es factorizable. ( )

b. La diferencia de potencias con exponente impar solo es factorizable cuando los exponentes son múltiplos de 3. ( )

c. La suma de potencias con exponente par no es factorizable. ( )

d. La diferencia de potencias con cualquier exponente es factorizable. ( )

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejercitación

15 Expresa cada trinomio como un binomio al cuadrado.

a. $x^4 + 6x^2 + 9 =$ ____________

b. $x^6 - 4x^3 + 4 =$ ____________

c. $y^8 - 2y^4z^3 + a^6 =$ ____________

d. $a^{10} + 8a^5 + 16 =$ ____________

e. $9a^2 - 12ab + 4b^2 =$ ____________

f. $y^4 - 6y^2z + 9z^2 =$ ____________

g. $16x^2 + 40xy^3 + 25y^6 =$ ____________

Ejercitación

16 ¿Cuál es el polinomio que expresa el área de cada figura? Factorízalo.

a.

Figura 2.38

b.

Figura 2.39

Comunicación

17 Factoriza cada trinomio como el producto del factor común y un trinomio cuadrado. Después, factoriza el trinomio cuadrado perfecto como un binomio cuadrado.

a. $6x^3 + 12x^2 + 6x$

b. $16x^5 - 48x^3 + 36x$

c. $3x^5 - 24x^4 + 48x^3$

d. $4x^3 + 40x^2 + 100x$

e. $7x^4 - 42x^3 + 63x^2$

18 Factoriza cada trinomio de la forma $a^2 + mab + b^2$ con m diferente de 2, por adición o sustracción.

a. $25a^2 + 54ab + 49b^2$

b. $121x^8 - 108x^4 + 4$

c. $64x^2 - 169xy + 81y^2$

d. $x^4 - 9x^2 + 16$

e. $x^8 - 3x^4 + 4$

f. $4x^4 - 29x^2 + 25$

g. $x^4 - 19x^2y^2 + 25y^4$

19 Une cada trinomio con su respectiva factorización.

a. $3a^2 + 8a + 5$	$2(a + 2)(3a + 5)$
b. $13a^2 - 7a - 6$	$(3a + 2)(7a - 1)$
c. $30a^2 + 17a - 21$	$(2a - 3)(4a + 5)$
d. $21a^2 + 11a - 2$	$(a + 1)(3a + 5)$
e. $6a^2 + 22a + 20$	$(6a + 7)(5a - 3)$
f. $8a^2 - 2a - 15$	$(13a + 6)(a - 1)$

20 Escribe V si la factorización es verdadera o F si es falsa.

a. $6m^2 + m - 15 = (3m + 5)(2m + 3)$ ( )

b. $8m^2 + 26m - 24 = (4m - 3)(m + 4)$ ( )

c. $10m^2 - 13m - 3 = (2m - 3)(5m + 1)$ ( )

d. $16m^2 + 8m + 1 = (4m + 1)(4m + 1)$ ( )

e. $6m^2 - m - 2 = (3m - 2)(2m + 1)$ ( )

Evaluación del aprendizaje

i Un centro vacacional diseñó un modelo de piscina que tiene dos secciones. Si el área de la zona de adultos se puede expresar como $x^2 - 144$, ¿cuáles son las expresiones algebraicas para las dimensiones de esta zona?

Figura 2.40

ii El polinomio que describe las utilidades de una empresa que fabrica vehículos de gama media corresponde al trinomio $5x^2 + 9x - 44$, donde x representa la cantidad de vehículos fabricados.

a. Factoriza la expresión.

b. ¿Para cuáles valores de la variable x las utilidades de la empresa son nulas?

9 Cocientes notables

Saberes previos

Escribe la expresión $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ como dos divisiones diferentes.

Analiza

La aceleración en la caída de un paracaidista, a cierta altura, puede calcularse a partir de la siguiente expresión:

$$a = \frac{v^2 - 64}{v - 8}$$

En esta, a es la aceleración y v es la velocidad de la caída.

- ¿Cuál es la expresión relacionada con la aceleración?

Conoce

Para resolver la situación, se divide la expresión $v^2 - 64$ entre $v - 8$. Observa:

$$\begin{array}{rrr|l} v^2 & & -64 & v-8 \\ \cline{4-4} -v^2 & +8v & & v+8 \\ \cline{1-3} & +8v & -64 & \\ & -8v & +64 & \\ \cline{1-3} & & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto, $(v^2 - 8^2) \div (v - 8) = (v + 8)$.

Luego la expresión relacionada con la aceleración a es $v + 8$.

Esta expresión cumple con una generalidad que se aplica a los cocientes que cumplen ciertas características. Este tipo de divisiones se conocen como **cocientes notables**.

Generalidades de los cocientes notables

Cuando se aplica el cociente de la suma o la diferencia de cuadrados entre la suma o la diferencia de sus raíces cuadradas, se cumple que:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \qquad \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

Ejemplo 1

Observa:

$$\frac{1 - m^4}{1 + m^2} = (1 - m^2)$$

Ejemplo 2

$$\frac{(x + y)^2 - z^2}{(x + y) - z} = (x + y) + z$$

Cuando se aplica el cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de sus raíces cúbicas, se cumple que:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - a + b^2$$

Al aplicar el cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la diferencia de sus raíces cúbicas, se cumple que:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + a + b^2$$

Ejemplo 3

Los cocientes $\frac{64n^3 + m^3}{4n + m}$ y $\frac{64n^3 - m^3}{4n - m}$ son, respectivamente:

- $(4n)^2 - 4n(m) + m^2 = 16n^2 - 4nm + m^2$
- $(4n)^2 + 4n(m) + m^2 = 16n^2 + 4nm + m^2$

Cociente de la suma o diferencia de potencias iguales de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades.

Para los cocientes $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$, se tiene lo siguiente:

a. El polinomio $a^n - b^n$ es divisible entre el binomio $a - b$ para los valores pares o impares de n, así:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

b. El polinomio $a^n - b^n$ es divisible entre el binomio $a + b$ para los valores pares de n. Observa:

$$\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}.$$

c. El polinomio $a^n + b^n$ es divisible entre el binomio $a + b$ para los valores impares de n, así:

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}.$$

Ejemplo 4

Al establecer el cociente de $\frac{x^5 - y^5}{x - y}$, se debe tener en cuenta que todos los signos del cociente son positivos $(+)$ y que el polinomio cociente es:

$$x^4 + x^3y^1 + x^2y^2 + x^1y^3 + y^4.$$

Ejemplo 5

Al hallar el cociente de $\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$, se debe considerar que, en este caso, los términos del cociente tienen signos alternos empezando por el signo positivo.

Por lo tanto:

$$\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2} = x^4 - x^2y^2 + y^4$$

Ejemplo 6

Observa abajo el desarrollo de cada uno de estos cocientes:

a. $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^3 + y^3}$ b. $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^5 + y^5}$ c. $\frac{x^{12} - y^{12}}{x^4 - y^4}$

a. $x^{12} - x^9y^3 + x^6y^6 - x^3y^9 + y^{12}$

b. $x^{10} - x^5y^5 + y^{10}$

c. $x^8 + x^4y^4 + y^8$

9 Cocientes notables

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{1-n^4}{1+n^2}$ b. $\frac{9-x^4}{3-x^2}$

c. $\frac{x^3-1}{x+1}$ d. $\frac{25-36x^4}{5-6x^2}$

e. $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ f. $\frac{y^2-x^2}{y+x}$

2 Desarrolla los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$ b. $\frac{x^{10}-m^{10}}{x^2+m^2}$

c. $\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$ d. $\frac{x^9+y^9}{x^3+y^3}$

e. $\frac{x^{18}+y^{18}}{x^9+y^9}$ f. $\frac{1+a^3}{1+a}$

Comunicación

3 Explica con tus palabras cómo desarrollarías los cocientes notables que se muestran a continuación.

a. $\frac{1-a^3b^6c^9}{1-ab^2c^4}$ b. $\frac{(a+x)^2-y^2}{(a+x)-y}$

c. $\frac{n^6+1^3}{n^2+1}$

4 Indica cuál es el cociente notable que se desarrolló en cada caso.

a. $\frac{8x^3+27y^3}{2x+3y}=4x^2-6xy+9y^2$

....

b. $\frac{n^6+1}{n^2+1}=n^4-n^2+1$

....

c. $\frac{x^2-4}{x+2}=x-2$

....

d. $\frac{216-125y^3}{6-5y}=25y^2+30y+36$

....

e. $\frac{1+a^3}{1+a}=1-a+a^2$

Ejercitación

5 Completa las igualdades.

$\frac{y^4+16}{y+2}$	=	
	=	$\frac{x^2-4}{x-4}$
$\frac{3a^2+3^2}{2a-3}$	=	
	=	$\frac{5m^4+625}{m+5}$

Tabla 2.12

6 Resuelve las siguientes operaciones a partir de las reglas de los cocientes notables.

a. $\frac{a^3+2^3}{a+2}$ b. $\frac{m^4-n^4}{m-n}$

c. $\frac{216+r^3}{6+r}$ d. $\frac{64-s^2}{8-s}$

e. $\frac{p^6-q^6}{p-q}$ f. $\frac{b^5+243}{b+3}$

Razonamiento

7 Calcula el cociente notable en cada caso.

a. $\frac{x^{18}-y^{18}}{x^3-y^3}$ b. $\frac{m^{27}+n^{27}}{m^3+n^3}$

c. $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ d. $\frac{27m^3-125n^3}{m^3-n^3}$

8 Relaciona la columna A con la columna B.

Cociente notable	Resultado
$\frac{4x^2-121}{2x+11}$	$\sqrt{3}a^{2x}+3b^y$
$\frac{9a^4b^2-16a^2b^6}{3a^2b-4ab^3}$	$3a^2b+4ab^3$
$\frac{3a^{4x}-9b^{2y}}{3b^y+\sqrt{3}a^{2x}}$	$2x-11$
$\frac{a^3-27b^3}{3a-9b}$	$\frac{1}{3}[a^2+(a)(3b)+(3b)^2]$

Ejercitación

9 Completa la Tabla 2.13.

Cocientes notables	Cociente
$\frac{m^5 + n^5}{m + n}$	
	$a^4 + a^3n + a^2n^2 + an^3 + n^4$
$\frac{x^6 - y^6}{x - y}$	$x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$
$\frac{64a^3 + 343}{4a + 7}$	
	$36 - 30y + 25y^2$
$\frac{8a^3 - 1}{2a - 1}$	
$\frac{x^3 - 1}{x - 1}$	

Tabla 2.13

Comunicación

10 Escribe el literal que le corresponde a cada ejemplo según la descripción.

- ◯ $\frac{27x^6 + 1}{3x^2 + 1}$
- ◯ $\frac{1 - v^{12}}{1 - v^6}$
- ◯ $\frac{m^3 - 1}{1 + m}$
- ◯ $\frac{1 - z^8}{1 + z^4}$

Cocientes notables
a. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma de las cantidades.
b. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades.
c. Cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de las cantidades.
d. Cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la suma de las cantidades.

Tabla 2.14

Razonamiento

11 Explica el error que se cometió en el desarrollo de cada cociente notable.

a. $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^3 + y^3}$
$= x^{12} - y^{12}x^9 + y^6x^6 - y^9x^3 + y^{12}$

b. $\frac{x^4 + 1}{1 + x^2}$
$= x^2 + 1$

c. $\frac{8m^3 + n^6}{2m + n^2}$
$= 4m^2 + 2mn^2 + n^4$

Resolución de problemas

12 En física, la velocidad V se define como la distancia d recorrida por un móvil en la unidad de tiempo t. Así, $V = \frac{d}{t}$.

Si un auto recorre una distancia $d = x^2 - y^2$ en un tiempo $t = x - y$, ¿cuál es la expresión algebraica para su velocidad?

Evaluación del aprendizaje

✓ Resuelve cada cociente notable y relaciona cada personaje con el hecho histórico que le corresponde.

a. François Viète
$\frac{9 - n^4}{3 - n^2}$

b. John Napier
$\frac{1 + m^3}{1 + m}$

c. Pierre Fermat
$\frac{8m^3 - 1}{2m - 1}$

d. Arquímedes
$\frac{m^2 - n^2}{m - n}$

◯ Fundamentó la hidrostática.	$m + n$
◯ Enunció la fórmula para las ecuaciones de sexto grado.	$3 + n^2$
◯ Introdujo el punto decimal para separar las cifras decimales de los números enteros.	$1 - m - m^2$
◯ Fue llamado *el primer cerebro del mundo* por Pascal.	$4m^2 + 2m + 1$