| | |
|---|---|
| **ASIGNATURA/AREA: Geometría** | **FECHA: Octubre de 2024** |
| **PERIODO: 3 de 2024** | **GRADO: 11° (11°1, 11°2 )** |
| **NOMBRE DEL DOCENTE: Jaime Buelvas** | |
| **NOMBRE DEL ESTUDIANTE:** | |
| **FECHA DE ENTREGA: Octubre 31 de 2024** | **FECHA DE SUSTENTACIÓN: Según horario organizado por coordinación.** |
| **LOGROS:** Geometría analítica: Continuación Ecuación de la recta y aplicaciones, Distancia entre dos puntos en el plano, punto medio de un segmento, ecuación de la circunferencia | |
| **Recursos: Hojas de bloc, lápiz, borrador, regla, lápices de colores, textos de matemáticas e internet.** | |

**PLAN DE APOYO**

**ACTIVIDADES**

| | |
|---|---|
| ***OBSERVACIONES:*** | |
| ***FECHA DE ENTREGA DEL TRABAJO*** | ***FECHA DE SUSTENTACIÓN*** |
| ***NOMBRE DEL EDUCADOR*** <br> ***Jaime Buelvas*** | ***FIRMA DEL EDUCADOR*** |

**TEORÍA, EXPLICACIONES Y BIBLIOGRAFÍA**

## Distancia entre dos puntos

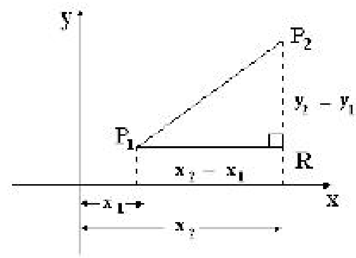
Sabemos que el **Plano cartesiano** se usa como un sistema de referencia para localizar puntos en un plano.
Otra de las utilidades de dominar los conceptos sobre el Plano cartesiano radica en que, a partir de la ubicación de las coordenadas de dos puntos es posible calcular la distancia entre ellos.
Dados dos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ la distancia queda determinada por la relación:

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para demostrar esta relación se deben ubicar los puntos **$P_1(x_1, y_1)$** y **$P_2(x_2, y_2)$** en el sistema de coordenadas, luego formar un triángulo rectángulo de hipotenusa **$P_1P_2$** y emplear el **Teorema de Pitágoras**.

**Ejemplo:**

Calcula la distancia entre los puntos **$P_1(7, 5)$** y **$P_2(4, 1)$**




$$\mathbf{d} = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

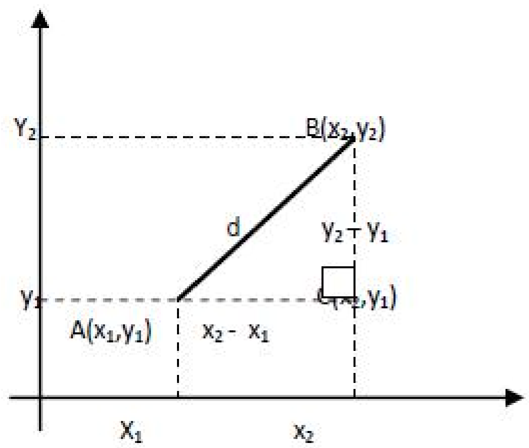
$$\mathbf{d} = \sqrt{9+16}$$

$$\mathbf{d} = \sqrt{25}$$

**d = 5 unidades**

En la fórmula se observa que la distancia entre dos puntos es siempre un valor positivo.

El orden en el cual se restan las coordenadas de los puntos **$P_1$** y **$P_2$** no afecta el valor de la distancia.



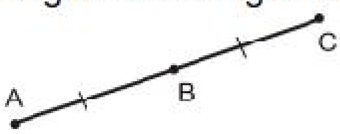

* En el triángulo rectángulo ACB; AB= d es hipotenusa y AC , BC son catetos

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## Punto medio de un segmento en el plano

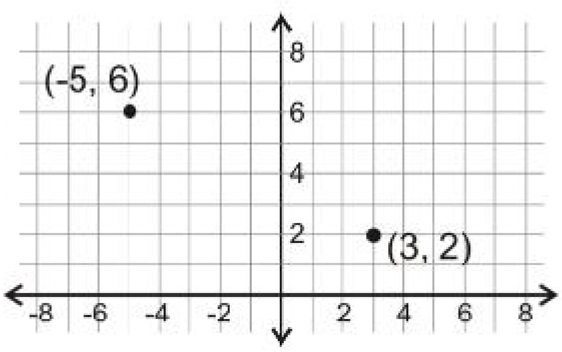
Un **punto medio** es un punto en un segmento de línea que lo divide en dos segmentos congruentes.




Debido a que $AB = BC$, $B$es el punto medio de $\overline{AC}$. Cualquier segmento de línea tendrá exactamente un punto medio.

Cuando los puntos se trazan en el plano de coordenadas, se puede usar una fórmula para encontrar el punto medio entre ellos.

Aquí hay dos puntos, (-5, 6) y (3, 2).




El punto medio debe estar a medio camino entre los puntos en el segmento de conexión. Con sólo mirar, parece que el punto medio es (-1, 4).

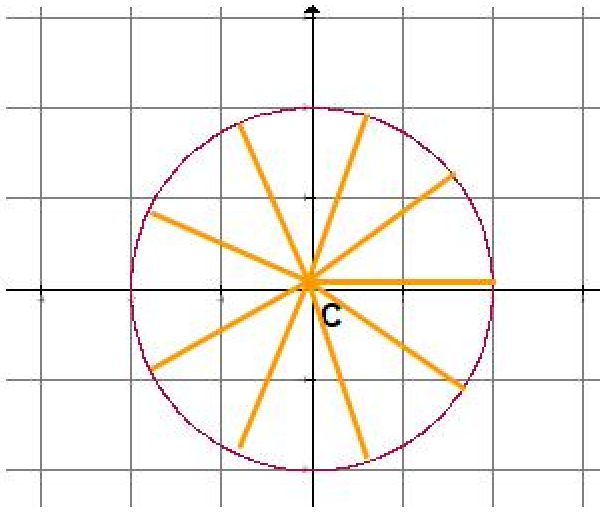
**Punto medio Fórmula:** Para dos puntos, $(x_1, y_1)$y $x_2, y_2$, es el punto medio $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Vamos a usar la fórmula para asegurarnos de que (-1, 4) es el punto medio entre (-5, 6) y (3, 2).

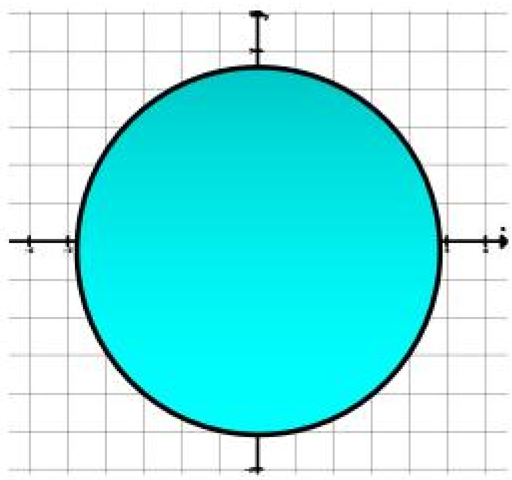
$$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{8}{2}\right) = (-1, 4)$$

**La circunferencia en geometría analítica**

Una circunferencia está formada por el conjunto de todos los puntos de un plano cuya distancia a un punto fijo llamado ***centro C*** es constante. La distancia se llama ***radio r*** (r>0) .

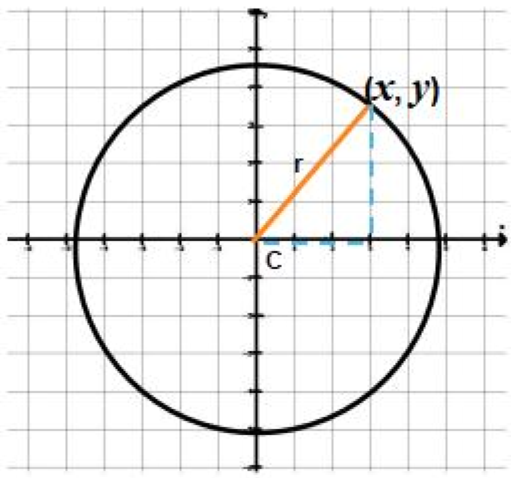



No es lo mismo hablar de circunferencia que de círculo, la circunferencia corresponde al borde y el círculo a la región del plano limitada por la circunferencia .



## Circunferencia con centro en el origen

La circunferencia tiene centro en el origen, **C (0,0)** y **radio** r



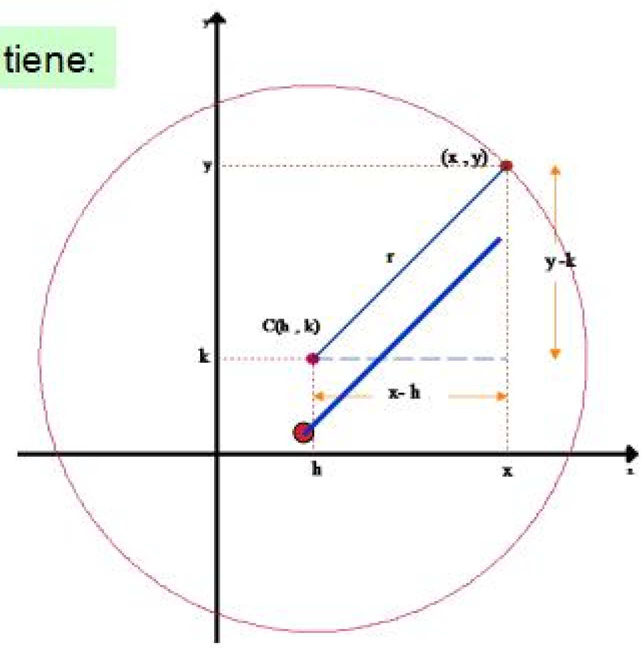

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos se tiene:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$$

$$\boxed{x^2+y^2=r^2} \rightarrow$$ Ecuación de la circunferencia con centro C(0, 0)

## Circunferencia con centro ($h$, $k$) y radio $r$

Por la fórmula de distancia se tiene:




$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Luego:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r$$

$$\downarrow$$

**Ecuación canónica** de la circunferencia con centro en ($h$,$k$) radio $r$.

La **ecuación ordinaria** de la circunferencia **con centro en el origen** y radio r, tiene la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Para representar esta ecuación en su **forma general**, el miembro derecho pasa al miembro izquierdo igualando a cero la ecuación, así:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

**EJEMPLO**: Convertir las ecuaciones ordinarias de la circunferencia indicadas a su forma general.

| FORMA ORDINARIA | FORMA GENERAL |
|---|---|
| a) $x^2 + y^2 = 4$ | a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ |
| b) $2x^2 + 2y^2 = 10$ | b) $2x^2 + 2y^2 - 10 = 0$ |
| c) $x^2 + y^2 = 100$ | c) $x^2 + y^2 - 100 = 0$ |
| d) $x^2 + y^2 = 8$ | d) $x^2 + y^2 - 8 = 0$ |
| e) $5x^2 + 5y^2 = 125$ | e) $5x^2 + 5y^2 - 125 = 0$ |
| f) $20x^2 + 20y^2 = 8000$ | f) $20x^2 + 20y^2 - 8000 = 0$ |

# Ejemplos resueltos

## DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO

Dados dos puntos en el plano $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la distancia entre ellos está dada por la siguiente fórmula:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Ejemplos:** Calcula la distancia entre los siguientes pares de puntos.

a) $A(3,0)$ $y$ $B(0,4)$

$$d_{AB} = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{9 + 16}$$
$$d_{AB} = \sqrt{25}$$
$$d_{AB} = 5$$

b) $A(5,3)\ y\ B(1,2)$

$$d_{AB} = \sqrt{(1-5)^2 + (2-3)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{16+1}$$
$$d_{AB} = \sqrt{17}$$

Punto medio de un segmento o punto medio entre dos puntos

$$M = \left(\frac{x_1 + x2}{2}, \frac{y_1 + y2}{2}\right)$$

¿Cuál es el punto medio entre los puntos (2, 6) y (8, 12)?

**Solución**

Tenemos las siguientes coordenadas:

- $(x_1, y_1) = (2, 6)$
- $(x_2, y_2) = (8, 12)$

$$= \left(\frac{2+8}{2}, \frac{6+12}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{10}{2}, \frac{18}{2}\right)$$
$$= (5, 9)$$

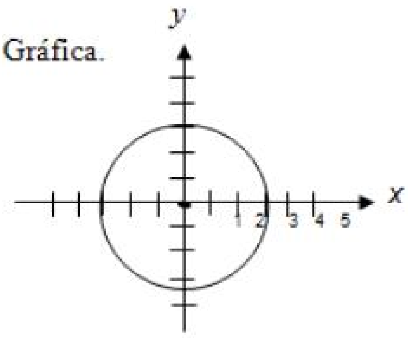
Encuentra el punto medio si es que tenemos los puntos (-5, -6) y (6, -2).

$$M = \left(\frac{x_1 + x2}{2}, \frac{y_1 + y2}{2}\right) = \left(\frac{-5+6}{2}, \frac{-6-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-8}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$$

Encontrar la ecuación (forma ordinaria y general) de la circunferencia con centro en el origen y radio indicado. Graficar.

**a)** r = 3

Gráfica.




**Fórmula**: $x^2 + y^2 = r^2$

**Sustitución**: $x^2 + y^2 = (3)^2$

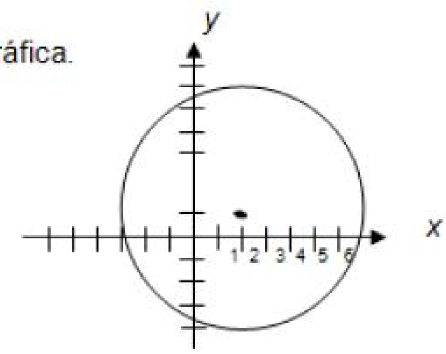
**Ecuación (Forma ordinaria)**: $x^2 + y^2 = 9$

**Ecuación (Forma general):** $x^2 + y^2 - 9 = 0$

Encontrar la ecuación (forma ordinaria y general) de la circunferencia con centro *C*(2, 1) y radio.

r = 5. Graficar

Gráfica.




**Elementos conocidos**:
*C*(2, 1)
r = 5

**Ecuación (Forma ordinaria):**
Fórmula: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Sustitución: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

Ecuación ordinaria: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

**Ecuación (Forma general):**

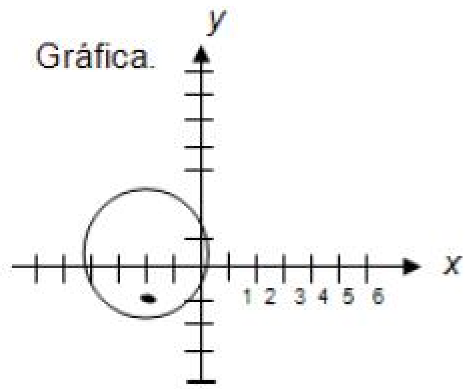
A partir de la ecuación ordinaria: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$
Desarrollando los binomios al cuadr $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$
Igualando a cero la ecuación: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0$
Ordenando términos: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 + 1 - 25 = 0$

Ecuación general: $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0}$

Esta última parte No la alcanzamos a trabajar en clases (Ecuación general) por lo tanto no pondré puntos en la evaluación de la ecuación general, solo de la ecuación ordinaria como está en el cuaderno

$C(-2,-1)$
$r = \sqrt{5} = 2.2$

Gráfica.




**Ecuación (Forma ordinaria):**

Fórmula: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Sustitución: $(x-(-2))^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{5})^2$

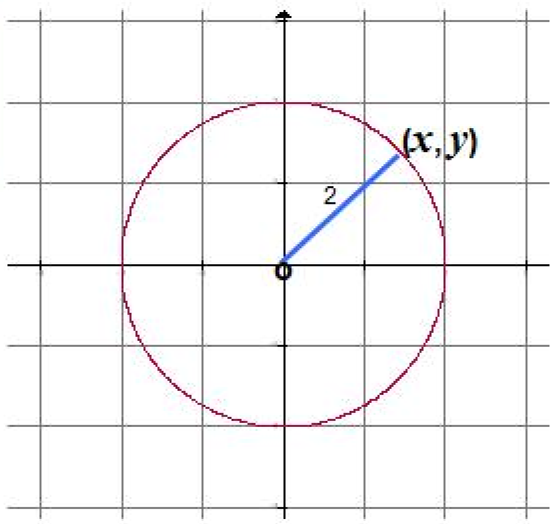
Ecuación ordinaria: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$

Determine la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y de radio 2.

Solución.

Aplicando la fórmula de la ecuación canónica se tiene.

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

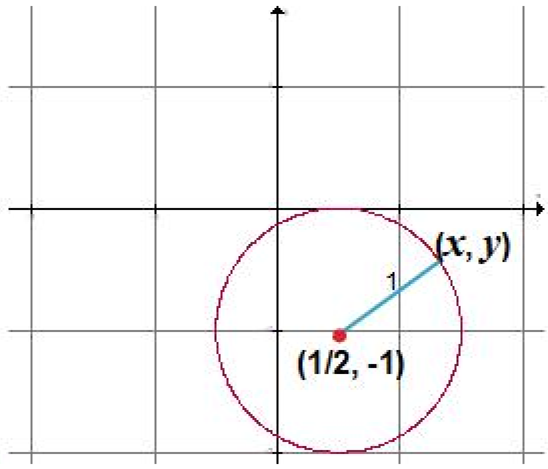


Determine la ecuación de la circunferencia con centro en (1/2, -1) y de radio 1.

Solución.

Aplicando la fórmula de la ecuación canónica se tiene:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-(-1)\right)^2=1^2$$




## EJERCICIOS O TALLER PARA ESTUDIAR

**INDICACIONES**

**El siguiente taller es un mecanismo de estudio, la evaluación para recuperar el tercer periodo se sacará con ejercicios parecidos a este taller**

**Este taller NO se entrega, la recuperación es una evaluación, por lo tanto la familia debe verificar que el estudiante realmente estudie a conciencia**

Cada estudiante en supervisión del acudiente o padre de familia de ponerse al día con las actividades realizadas en clases y las diversas consultas y tareas planteadas, ponerse al día con el cuaderno con todas las actividades desarrolladas a la fecha

Estudiar las competencias desarrolladas con los temas estudiados en el periodo:
Perímetros y áreas de figuras planas
Teorema de PITÁGORAS

Corregir, estudiar y analizar la evaluación de periodo y las actividades evaluadas en clase

Presentar la evaluación de plan de apoyo en la fecha programada por la Institución, la calificación sacada en la evaluación es la nota que quedará como definitiva del periodo como plan de apoyo

Se insta a la familia a hacer el acompañamiento respectivo para que el estudiante alcance los desempeños del área

Taller para preprarse para la evaluación

**NO es para entregar**

**Ejercicios sobre distancia entre dos puntos y punto medio de un segmento**

**Ejercicios:** Encuentra la distancia entre los siguientes pares de puntos

a) $A(5,1)$ $y$ $B(0,3)$
b) $A(-3,2)$ $y$ $B(1,4)$
c) $A(-7,9)$ $y$ $B(-2,3)$
d) $A(2,-8)$ $y$ $B(6,-5)$
e) $A(0,5,2)$ $y$ $B(4,0,1)$
f) $A(2,1,3)$ $y$ $B(5,2,4)$
g) $A(-1,2,-5)$ $y$ $B(4,-1,6)$
h) $A(-4,0,5)$ $y$ $B(-3,1,2)$

Para las preguntas **1-5** encuentra el punto medio entre cada par de puntos.

**1.** (-2, -3) Y (8, -7)

**2.** (9, -1) y (-6, -11)

**3.** (-4, 10) y (14, 0)

**4.** (0, -5) y (-9, 9)

**5.** (-3, -5) Y (2, 1)

1. En cada par de puntos, hallar las coordenadas del punto medio, luego calcular las dos distancias para comprobar que son iguales o la distancia entre los dos puntos y la media distancia para comprobar que una es la mitad de la otra, grafique los puntos en el plano y verifique. A(-3,6) y B(5, 6)

2. En cada par de puntos, hallar las coordenadas del punto medio, luego calcular las dos distancias para comprobar que son iguales o la distancia entre los dos puntos y la media distancia para comprobar que una es la mitad de la otra, grafique los puntos en el plano y verifique. 2. A(1,4) y B(8,2)

3. En cada par de puntos, hallar las coordenadas del punto medio, luego calcular las dos distancias para comprobar que son iguales o la distancia entre los dos puntos y la media distancia para comprobar que una es la mitad de la otra, grafique los puntos en el plano y verifique. A(-4,5) y B(6, 3)          2. A(1,3) y B(7,8)

4. En cada par de puntos, hallar las coordenadas del punto medio, luego calcular las dos distancias para comprobar que son iguales o la distancia entre los dos puntos y la media distancia para comprobar que una es la mitad de la otra, grafique los puntos en el plano y verifique. 2. A(1,3) y B(7,8)

**Ejercicios sobre la circunferencia**

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (2,-3) y tiene radio 6 cm., realiza la gráfica en un plano cartesiano

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (-1, 4) y su diámetro es 10 unidades, realiza la gráfica en un plano cartesiano

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen del plano y su radio es 5 unidades, realiza la gráfica en un plano cartesiano

Calcula el centro y el radio de la circunferencia y realiza la gráfica en un plano cartesiano

$x^2 + y^2 = 81$

Calcula el centro y el radio de la circunferencia y realiza la gráfica en un plano cartesiano

$x^2 + (y-3)^2 = 36$

Calcula el centro y el radio de la circunferencia y realiza la gráfica en un plano cartesiano

$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$

Calcula el centro y el radio de la circunferencia y realiza la gráfica en un plano cartesiano

$(x+5)^2 + (y-3)^2 - 16 = 0$

Calcula el centro y el radio de la circunferencia y realiza la gráfica en un plano cartesiano

$(x+1)^2 + (y+6)^2 = 49$

Calcula el centro y el radio de la circunferencia y realiza la gráfica en un plano cartesiano

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 100$

**Bibliografía y recursos digitales**

https://www.youtube.com/watch?v=HPS7B57keEE

https://www.youtube.com/watch?v=Wa5f9jc009I&list=PLZeRcx60JO516gn6GDssRwspHWzd0WQPQ

https://www.youtube.com/watch?v=VA6WsOxJ40U

https://www.youtube.com/watch?v=SVfW8R4imZA

https://www.youtube.com/watch?v=unDcrHfofbw

https://www.youtube.com/watch?v=sYEzkX-Q1Rw

https://www.youtube.com/watch?v=vICf_JIwar4&list=PLeySRPnY35dEqa7TokZvU6AqPL0n246JA

https://www.youtube.com/watch?v=jk9V5OkJIAg&list=PLeySRPnY35dEqa7TokZvU6AqPL0n246JA&index=2

https://www.youtube.com/watch?v=vQg3OSrR_Mw

## Nota: Recordar que la recuperación es una evaluación sobre este taller, no debe entregarlo, sino resolverlo a conciencia para la evaluación